CÁLCULO INFINITESIMAL PARA UM CURSO DE ENGENHARIA

Tânia Cristina Baptista Cabral[1]
Roberto Ribeiro Baldino[2]

RESUMO

Neste artigo foi elaborada uma análise crítica do ensino de cálculo ministrado pelos departamentos de matemática nos cursos de engenharia, mostrando que os infinitésimos comparecem nas concepções espontâneas dos alunos e que o ensino pela via exclusiva dos limites cria dificuldades e exclusões. Discuti-se a questão da legitimidade dos infinitésimos como objeto de ensino e exemplificamos casos em que os raciocínios pela via dos infinitésimos são mais adequados às aplicações. Traz-se exemplo de sala de aula e apresentamos a proposta didático-pedagógica que estamos desenvolvendo nas componentes temáticas de matemática da UERGS, Guaíba. Finalmente é exposta brevemente a fundamentação dessa proposta baseada na psicanálise de Lacan e na filosofia de Hegel.

Palavras-chave: Cálculo infinitesimal, educação em engenharia, educação matemática, diferencial de Leibniz, cálculo na engenharia

ABSTRACT

In this paper a critical analysis on the methods of teaching of calculus performed by mathematics depart¬ments staff in the engineering courses was carried out. It is shown that the infinitesimals approach appears naturally among students' spontaneous conceptions and, on the other hand the one-way teaching - via limits - creates difficulties and exclusions. A discussion on the legitimacy question of infinitesimals as a teaching methodology is carried out. Sample cases are presented in which reasoning via infini¬tesimals is demonstrated to be more adequate for applications. Some cases are discussed and an introduc¬tion to the pedagogical proposals that are under development at UERGS, Guaíba, Brazil, is presented. Finally, a brief introduction on the foundations of such methodology based on Lacan's psychoanalysis and Hegel's philosophy, is presented.

Key-words: Infinitesimal calculus, engineering education, mathematics education, Leibniz' differential, calculus in engineering

INTRODUÇÃO

Abordar limites por épsilons e deltas num curso de cálculo é uma questão polêmica. Ivor Gratan-Guinness,[1] por exemplo, argumenta em favor de propostas didáticas baseadas no conceito de *diferencial* de Leibniz, por essa noção estar mais próxima das concepções espontâneas do aluno. Educadores em engenharia questionam o ensino dos cálculos em razão da ênfase excessiva dada às demonstrações. Por conseqüência, sobra pouco tempo para direcionar a matemática a aplicações que fazem sentido ao engenheiro. Não se aproveitam estudos sobre metodologias como a modelagem ou resolução de problemas.

A história da produção dessa matéria denominada "a Matemática" mostra como esta progrediu e foi organizada, institucionalmente, seguindo o processo de divisão do trabalho na economia, até organizar-se como disciplina autônoma, na qual podem ser distinguidas três práticas sociais (BALDINO, 1988a): (i) de pesquisa matemática; (ii) de ensino para futuros matemáticos; (iii) de ensino para "alunos que estão basicamente engajados no estudo de outros assuntos (*subjects*)" (HOWSON et al., 1988, p. 2).

No ensino de cálculo, objeto de nossa discussão, a teoria dita de Weierstrass (épsilons e deltas), encontrada em livros tradicionalmente adotados,[2] é uma tentativa de imposição prematura ao calouro de idéias que constituem o coroamento da própria matéria que se quer ensinar. Sabedores dessa dificuldade, muitos professores dedicam mais tempo à teoria e às abstrações na esperança de torná-las acessíveis. Porém, essa teoria é logo "esquecida"[3] durante o curso. As tentativas de introduzir épsilons e deltas nos cálculos, sem fundamentação que tome como referência o aluno e seu processo de aprendizagem, geram *necessariamente* obstáculos de ordem pedagógica "(...) os

1 Educadora Matemática, Pesquisadora FAPERGS e professora colaboradora no curso de Engenharia em Sistemas Digitais, Unidade de Guaíba, Universidade Estadual do Rio Grande do Sul – UERGS. E-mail: tania.c.b.cabral@terra.com.br

2 Docente no Curso de Engenharia em Sistemas Digitais, Unidade de Guaíba, Universidade Estadual do Rio Grande do Sul – UERGS. E-mail: rrbaldino@terra.com.br

professores... não compreendem que não se compreenda"[4] (BACHELARD, 1980, p. 18).

No movimento conhecido como aritmetização da análise, no qual foi gerada a teoria de Weierstrass, o contínuo foi depurado de todo raciocínio sobre infinitésimos; apenas números reais foram admitidos como legítimos. Visava-se a uma organização de objetos que fosse coerente, universal e clara; uma organização em que os significados prescindissem do sujeito do enunciado. Caminhou-se na direção de alcançar e estabelecer uma segurança que, no início do século 20, foi abalada por várias versões de um paradoxo, a mais incisiva das quais foi a formulada por Bertrand Russel. A versão mais popular desse paradoxo é a do barbeiro que barbeia a todos, que não barbeiam a si mesmos. Não se tem como escapar aos equívocos provocados pela linguagem, é o que indica esta e outras formas desse paradoxo; esses equívocos decorrem de que o significante pode significar tudo, exceto a si mesmo (LACAN, 1975). O paradoxo nada mais é do que um efeito do rompimento desse princípio. O que Gödel essencialmente fez, na década de 30 do século passado, foi formular o paradoxo do barbeiro em termos aritméticos. A conclusão foi que não era possível assegurar *a priori* a consistência da aritmética, muito menos a da matemática. A partir daí a matemática constituiu-se pelo exorcismo antecipado das possíveis aparições do paradoxo.

Foi nesse processo de "evolução" que a matemática do século 20 desprezou o conceito no sentido filosófico ao termo e abandonou qualquer pretensão de verdade, entendida esta como concordância entre o conceito e o objeto. Não se pretendeu mais descrever, reproduzir ou representar a natureza, como no tempo de Fourier (2003), e buscou-se apenas construir modelos que guardassem com a realidade externa uma relação mais ou menos problemática. Os matemáticos se limitaram a impedir o deslize do significado sob o significante por meio de convenções de linguagem seguindo a tática inaugurada por Cauchy: "diz-se que..." (*on dit que*). Esse movimento recebeu seu nó de arremate nas teorias de conjuntos que marcam a porta de entrada de um novo domínio, dito "fundamentos da matemática". Há aqui uma concepção epistemológica resultante desse esforço em prol da mera certeza em detrimento da verdade conceitual. Foi essa concepção que fundou e funda até hoje ações que levam a que se degrade um aspecto da produção cultural, donde a designação *ensino em serviço* quando o ensino de matemática é destinado ao aluno "não-matemático" – engenheiros, por exemplo.

Em decorrência desse desenvolvimento histórico-epistemológico, as dificuldades relacionadas ao ensino de matemática são muitas. Em razão dos fracassos alarmantes, o tema "ensino de matemática para engenharia" tem sido reconhecido nas comunidades científicas brasileiras [5]. Os últimos COBENGE e CNMAC mostram trabalhos onde se busca compreender o que acontece no processo de aprendizagem de matemática. Por exemplo, as respostas de alunos são investigadas à luz da *teoria da análise de erros* (CURY, 2004, 2003a e b) e à luz da *teoria das concepções* ZUCHI; GONÇALVES, 2003). É estudada a *teoria da aprendizagem significativa* no âmbito da psicologia, a qual permite reorganizar as relações entre professor e aluno (CAMARGO Jr.; CUGNASCA; ALMEIDA Jr., 2003), para a partir daí serem propostos novos paradigmas de tratamento, estratégias, metodologias e técnicas de trabalho. A prática docente também é analisada por ser responsável pela integração dos conteúdos específicos com os conteúdos considerados de formação profissional (MENESTRINA; GOUDARD, 2003). Sobre os motivos para haver altos índices de reprovação e desistência, especialmente nas disciplinas de cálculo, são apontadas causas como "as dificuldades intrínsecas da disciplina, a falta de base dos alunos e um grande distanciamento metodológico entre o 2º grau e o curso superior" (NASCIMENTO, 2001).

Para resolver o problema de aprendizagem têm sido tentadas propostas como: dar preponderância à questão metodológica na consolidação da base conceitual dos alunos (NASCIMENTO, 2001), fazer uso de projetos temáticos (PEREIRA; CARVALHO, 2003), estabelecer cursos de nivelamento e apoio para alunos ingressantes (FRANCHI, 2003; DZIEDZIC et al., 2001), fazer uso da resolução de problemas como metodologia de ensino (CONCEIÇÃO; GONÇALVES, 2003) e mudar a concepção epistemológica do professor sobre as disciplinas (LODER, 2001).

Com relação à introdução de tecnologias na sala de aula, temos trabalhos que visam: usar novas tecnologias da informação e comunicação (FLEMMING, 2004) e ambientes na web (SOARES, 2003); usar calculadoras gráficas e programas computacionais em salas de aula informatizadas (MORAES e MENDONÇA, 2003; GONÇALVES, CHUERI e SARCOMAN, 2002; BALDIN e BALDIN, 2001); promover a educação a distância e a construção de ambiente de aprendizagem (MENDES FILHO, 2001).

As análises e propostas aqui destacadas têm mérito pela importância dos efeitos sobre a reorganização da estrutura acadêmica; dizem respeito às modificações no modo de o professor apresentar os objetos matemáticos. Essas modificações estão relacionadas muitas vezes com o uso de instrumentos mais atrativos, que, presume-se, possam motivar o aluno a aprender.

Entretanto, há dois pontos importantes, porém pouco debatidos: (1) a influência da formação do profissional matemático na condução de uma sala de aula; (2) a estruturação de turmas constituídas por alunos de cursos diferentes.[6] É preciso, então trazer para o debate: (1) o fato de as diretrizes que norteiam a prática científica matemática estarem refletidas na diretriz didática escolhida pelo profissional professor e (2) os efeitos da organização da instituição em estrutura de departamentos. Em outras palavras, o desafio é formular projetos pedagógicos fundados em epistemologia adequada aos cursos profissionais, necessariamente diferente daquela que ampara o modo como a instituição hoje ainda se organiza.

Vejamos mais de perto o primeiro ponto através do uso do livro-texto.

A DIRETRIZ DIDÁTICA TRADICIONAL

Os atuais livros de cálculo usados como textos, inegavelmente, são fruto da necessidade de certeza que permeia a matemática. Os autores não abrem mão da tentativa de tornar acessível aos iniciantes o rigor dominante da matemática do século 20. A seqüência de conteúdos, que se inicia com a apresentação dos números reais para, em seguida tratar de limites, depois derivadas e integrais, em cursos de cálculo I, é resultado da suposição de que se está ensinando matemática a partir de um ponto matematicamente elementar para alcançar pontos mais elaborados. Para justificar os conteúdos, tal como são ministrados, chega-se a dar a definição rigorosa de limite para jamais usá-la. Define-se a derivada pelo limite do quociente de Newton; em seguida, faz-se a interpretação em termos das retas secante e tangente e demonstram-se as regras de derivação; depois há aplicações a problemas de otimização e taxas relacionadas; uma detalhada exposição sobre somas de Riemann precede o teorema fundamental do cálculo, necessário para garantir a validade da aplicação ao cálculo de áreas e volumes.

Todo o desenvolvimento nos livros-textos é acompanhado de algumas aplicações, ilustrativas, à física, à biologia, à economia. As diferenças resumem-se ao estilo de cada autor, mesmo os nacionais, diante do aluno imaginário que lhes serve de interlocutor. Resumidamente, os textos de cálculo são organizados segundo os cânones do conhecimento matemático: quando as garantias da certeza do instrumento a ser usado não são providas por meio de demonstrações, o leitor é remetido a outras fontes de certeza.

Para se ter uma idéia mais clara, consideremos, rapidamente, como o modelo das secantes é tradicionalmente usado para introduzir uma interpretação da derivada. Parte-se da idéia de que uma reta secante se aproxima da reta tangente a uma curva acompanhada da expressão "um ponto que se aproxima de outro tanto quanto se queira". À definição de derivada, limite do quociente de Newton, aliam-se as expressões "tender a zero", "estar se aproximando de zero", "x tende a a" ou "x está tão próximo de a quanto se queira".

O professor não percebe que essas expressões, da ordem do intuitivo, revigoram a existência de uma quantidade muito pequena que antecede a noção de limite: o infinitésimo. O que prevalece para o aluno é que "limite" é uma questão de atingir ou não atingir certo lugar (CORNU, 1991). Em outras palavras, o professor reforça uma idéia que ele mesmo procura evitar e depurar da sala de aula. Como o professor está lidando com a disciplina de cálculo e como esta, mormente, é destinada a turmas de natureza distintas, fica fora a questão de analisar a convergência de uma seqüência formada por coeficientes angulares de retas secantes. Não é que a reta secante se aproxime da tangente, mas, sim, que a seqüência de coeficientes angulares de retas secantes converge e o limite é o número dito coeficiente angular da reta tangente ou, simplesmente, derivada. Isso sem contar que, a estas alturas, a certeza almejada mandaria avaliar a forma de convergência através de sua definição epsilôntica.

Nada disso é tratado num curso de cálculo, nem poderia, já que os fundamentos do cálculo só podem ser rigorosamente construídos em nível de uma disciplina de análise real. Mas as conseqüências desse ensino são visíveis. O aluno, após quatro anos de graduação, afirma sem hesitar que aprendeu com seus professores, inclusive o de análise matemática, que "o limite de $f(x)$ tende a...".[7]

Quando o professor chega às "aplicações", como problemas de otimização e taxas relacionadas, descobre que o aluno não consegue achar a função a derivar. Na verdade, a maioria sequer consegue relacionar variáveis sob o conceito de função. Os alunos terminam esses cursos sabendo calcular a área sob o gráfico de uma função pela variação de uma primitiva, mas se lhes perguntamos o que isso tem a ver com as somas de Riemann, expostas durante um tempo de aula precioso, poucos conseguem fazer alguma referência ao teorema fundamental do cálculo e jamais encontramos algum que soubesse reproduzir a essência do argumento ali contido.

Em suma, por mais que o professor que ministra cálculo se esforce para ignorar as justificativas fundadas nos infinitesimais, elas terminam sobrevivendo: o aluno é capaz de efetuar o cálculo de um limite mas, simultaneamente, não encontra o menor problema para justificar que $0,999\ldots<1$: "tem um número que não dá para ver entre esses dois números". O professor sorri, ou leva as mãos à cabeça em desespero quando um aluno lhe "explica" que entre 0.999... e 1 há um número "constituído por zero vírgula, infinitos zeros e depois 1".[8]

Assim, relacionada com a didática, levanta-se a questão da sobrevivência das quantidades infinitamente pequenas num curso de cálculo onde a via dos infinitesimais não é considerada, embora duvidemos que os professores, especialmente os que têm mais preparo em disciplinas aplicadas, não se socorram delas em seus raciocínios, como concepções clandestinas.

Toda ação didática é sempre acompanhada de uma abordagem pedagógica e ambas são amparadas por concepções epistemológicas (CABRAL, 1998; KUEHN e BAZZO, 2004). O ensino tradicionalmente conduzido, em qualquer que seja a sala de aula, tem por efeito produzir, de modo geral, um aluno que demandará tempo para ter iniciativas de busca de soluções para os problemas que enfrentará como profissional.

As pesquisas em educação matemática e educação em engenharia têm mostrado que é preciso que professor, aluno e, aditamos, a própria instituição de ensino assumam outras posturas "Ao tentar modificar a atual postura positivista e retransmissora (do professor) estaremos abrindo um novo caminho na formação de um engenheiro crítico e reflexivo perante novas tecnologias e suas implicações junto à sociedade" (KUEHN e BAZZO, p. 10, 2004). "Em um processo de aprendizagem, o aluno não pode ter uma posição passiva, devendo se constituir em um elemento atuante e ativo dentro de sala de aula" (CAMARGO Jr.; ALEMIDA Jr.; CUGNASCA, p. 19, 2004).

PEDAGOGIA, LEGITIMIDADE E DIDÁTICA: OUTRAS PROPOSIÇÕES

Discutiremos a seguir três importantes questões institucionais quando atentamos para o que ocorre em sala de aula, onde o aluno, com suas concepções e idiossincrasias, passa a ser o centro de nossas atenções, o objeto pelo qual nos deixamos hipnotizar: a *ação pedagógica*, a *legitimidade* e a *ação didática*.

PRIMEIRA QUESTÃO: A PEDAGOGIA, É PRECISO OUVIR O ALUNO

As ações pedagógicas do ensino tradicional vigente (ETV) estão fundadas em idéias cujo traço de identificação simbólica é o mesmo: "o bom aluno". Freqüentemente, especialmente nos inícios de semestre, os colegas nos perguntam se em nossa sala de aula há "alunos bons". Esses colegas não se dão conta é que esse "bom", assim abstrato, colocado de supetão diante de um uma xícara de cafezinho, só se constitui diante do um "não bom", igualmente abstrato, mas que, a seguir, assume a conotação concreta de exclusão de "alunos que não têm talento". Na sala de aula, o professor do ETV mostra-se surdo ao que diz o aluno tido como "não bom", e este, por seu lado, admite esse tipo de identificação tornando-se passivo, esperando que o professor formule o problema e também forneça o modelo de resposta a ser repetido. Posições como essas e os muitos (des)entendimentos sobre as aprendizagens num curso de cálculo decorrem de escolhas dos sujeitos, alunos e professores, para responderem pelo que fazem.

A pedagogia que elegemos leva-nos a assumir o papel do bom ouvinte. Acolhemos o discurso do aluno e reconhecemos que suas concepções infinitesimais existem. Numa aula de cálculo, o aluno lida com infinitésimos além de lidar com limites. Espera-se que ele possa, finalmente, manifestar uma escolha, firmar um compromisso com aprender cálculo diferencial segundo esta ou aquela via. Devolvemos ao aluno o direito de *expressar* suas concepções infinitesimais.

Em vez de dizermos que "as noções infinitesimais fornecem uma maneira natural para expressar as idéias básicas do cálculo e da análise" (TALL, 1982),[9] diremos que noções infinitesimais fornecem um modo natural para o aluno *expressar-se* como sujeito. São as idéias que nos têm, são as idéias que nos acometem por sermos seres de linguagem: quando nos expressamos através deste ou daquele discurso, estamos nos dando a conhecer e estamos nos constituindo como sujeitos, (re)conhecidos por nossos interlocutores. Atuamos da posição que nos permite saber que o aluno, ao enfrentar certas situações, tanto pode conhecer como pode ignorar. Para resgatar o *sujeito aprendente*, portanto, criamos condições que permitam ao aluno tratar sua própria ignorância, se quiser (CABRAL, 1998 e 2001; CARVALHO e CABRAL, 2003).

Quando o aluno fala, sua posição subjetiva é evidenciada em persistências; trata-se da preferência do sujeito. No caso de se aprender cálculo diferencial, o aluno mostra persistências relativas às concepções infinitesimais que, principalmente, em salas de aula de cursos de matemática não são acolhidas pelo professor como preferências do aluno em lidar com matemática.

Nos cursos de engenharia ocorre algo um pouco diferente. O efeito causado pelo ensurdecimento do professor aos infinitésimos é o desprezo pelo cálculo que os alunos terminam expressando: "...o cálculo não serve para nada, meu pai é engenheiro e ele nunca mais usou".[10]

Nosso objetivo é, em última instância, dar aos jovens a chance, não de aprender a teoria Weierstrassiana ou cálculo infinitesimal ou análise, mas, antes de mais nada, de compreender o processo de negação do sujeito quando o trabalho com números reais é privilegiado em detrimento dos infinitésimos. A aprendizagem deveria ser uma conseqüência de tal preocupação. A oposição às concepções que mantêm o sistema de exclusão será uma conseqüência de uma vivência crítica bem fundada.

SEGUNDA QUESTÃO: LEGITIMIDADE

A questão da legitimidade dos infinitesimais deve ser tratada para tocar o ponto crucial, que é o provimento de uma base para a prática didática em cursos de cálculo, diferente da base de análise real que fundamenta a matemática do ETV.

Se nos situarmos na matemática, temos que os infinitésimos constituem um tipo de conhecimento legítimo até fins do século dezenove, quando a matemática ainda aspirava à verdade conceitual, depois relegada a segundo plano sob o rótulo de "questões filosóficas". A partir do final do século 19 os infinitésimos foram substituídos pelas concepções referidas geralmente a Weierstrass, a ponto de serem redefinidos nessa teoria como "seqüências que tendem a zero". Bourbaki é o ápice da tendência de exclusão dos infinitésimos e o coroamento da tentativa que, desde Newton e Leibniz, aspirava para a matemática a um modelo expositivo rigoroso, nos moldes de Euclides. Por conseqüência, os infinitésimos perderam legitimidade no ensino na matemática.

Entretanto, quer gostemos, quer não, os infinitesimais permaneceram em disciplinas na engenharia e na física, especialmente em áreas como mecânica e eletricidade, onde sempre foram largamente usados. É comum depararmo-nos com referências a elementos infinitesimais de tempo dt, deslocamento infinitesimal ds, trabalho infinitesimal $dW = F \times ds$, massas e cargas elétricas infinitesimais etc. Os infinitesimais são referidos também como "elementos" de uma grandeza, como elemento de volume, de área, de comprimento. Os alunos já no primeiro ano de um curso de engenharia são introduzidos aos infinitésimos, apesar de os professores de matemática os evitarem e privilegiarem o ensino de limites no cálculo. O divórcio entre a matemática do século 20 e as disciplinas técnicas se completa. Essas disciplinas usam a formulação matemática como meio de expressão, não como recurso de validação de seus resultados.

Entretanto, as concepções infinitesimais permitem expressar a essência dos conceitos de maneira simples, independentemente de sistemas de coordenadas, que são introduzidos depois. Os conceitos de divergente e rotacional de um campo vetorial $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ fornecem um bom exemplo de como a matemática do século 20 se afastou dos conceitos em direção às certezas. Nos livros-textos esses operadores são apresentados no sistema de coordenadas dito cartesiano através de suas componentes (STEWART, 2001:1075):

$$div\,\mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}$$

$$rot\,\mathbf{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

Fica a cargo do aluno desentranhar o significado físico desses operadores a partir dos teoremas de Gauss e de Stokes: a certeza do cálculo foi apresentada antes da expressão do conceito. Depois, já em nível de pós-graduação, o aluno fica sabendo que em outros sistemas de coordenadas (cilíndricas, esféricas etc.) esses operadores têm outras componentes. Depara-se então, com uma novidade, os *fatores de escala*, que no sistema cartesiano sequer eram mencionados porque eram constantes iguais a um.

Por outro lado, o enfoque infinitesimal permite expressar, de saída, o conceito desses operadores. Os pré-requisitos são os conceitos de *fluxo,* através de uma superfície, e o de *circulação,* ao longo de uma curva, inerentes a todo campo vetorial, como o campo das velocidades de um fluido em movimento, os campos elétrico e magnético. Pode-se dizer que o divergente é o fluxo externo através das paredes de uma região fechada (como um cubo ou esfera) dividido pelo volume dessa região, quando essa região se torna infinitesimal, ou seja, o divergente é a derivada do fluxo em relação ao volume. O rotacional, cuja componente normal a uma curva fechada (circunferência ou retângulo) é a circulação do campo ao longo dessa curva dividida pela área da superfície que ela encerra quando esta área se torna infinitesimal, ou seja, é a derivada da circulação em relação à área.

Com essa expressão dos conceitos, os teoremas de Gauss e Stokes são imediatamente obtidos, independentemente de sistemas de coordenadas, recorrendo-se a uma partição em infinitos elementos infinitesimais, respectivamente, de um sólido e de uma superfície. O raciocínio resume-se ao cancelamento dos fluxos e das circulações através das paredes de elementos de volume ou de divisórias de elementos de área contíguos. A partir de expressão do divergente e do rotacional como derivadas, já com a concretude do significado físico, pode-se passar ao cálculo efetivo, determinando as componentes desses operadores em sistemas de coordenadas ortogonais. Os fatores de escala surgem naturalmente e as expressões acima citadas aparecem, como o caso especial em que os fatores de escala são constantes iguais a um. O movimento de fluidos e as equações de Maxwell para o eletromagnetismo formarão as situações paradigmáticas para o entendimento desses conceitos.

Assim, os infinitésimos podem se tornar meio de expressão de conceitos em disciplinas técnicas. Não é necessário que os matemáticos os mantenham como "passageiros clandestinos" em seus raciocínios porque, a partir dos anos sessenta, Abraham Robinson (ROBINSON, 1966) fundamentou-os dentro do rigor da teoria de Weierstrass e inaugurou uma área especializada da matemática do século 20 denominada "análise não-standard". A reta geométrica denominada "contínuo" passa a conter, além dos números reais, os infinitésimos e os números infinitos (inversos de infinitésimos). Cada número real fica cercado de seus acréscimos infinitesimais, constituindo o que, em homenagem a Leibniz, denomina-se "mônadas". Cada mônada é uma reprodução do contínuo todo, como em um fractal. Diremos que a reta real é um "contínuo magro" e que esses números chamados hiper-reais constituem um "contínuo espesso". Concepções infinitesimais são tão rigorosas quanto as epsilônticas e não há razões de rigor matemático que as impeçam de adentrar as salas de aula. De fato, a partir de Robinson (1966) surgiram empreendimentos com esse objetivo (KEISLER, 1986; HARNIK, 1986; TALL, 1980a e b, 1982; MILANI, 2002).

Em seu texto, Keisler (1986) claramente teve a intenção de escrever um livro de cálculo elementar. Entretanto, no capítulo introdutório lemos que o livro todo se baseia no "princípio de transferência" (*transfer principle*), seguido de três outros. Segundo esses princípios, "toda proposição real que vale para uma ou mais funções reais, vale para suas extensões hiper-reais" (KEISLER, p. 28, 1986).[11]

Em razão das dificuldades dos alunos com proposições lógicas que enunciam os teoremas da análise real (PINTO, 1995), podemos fazer o exercício de imaginar como calouros, que às vezes sequer conseguem enunciar o teorema de Pitágoras, enunciariam proposições com precisão lógica para, então, decidir sobre sua validade. Assim, Keisler (1995) comete o erro típico do ETV: tentar ensinar análise antes de cálculo. No nível da disciplina de análise para futuros matemáticos, Tall (1982) introduz um conjunto fraco de axiomas que "mostraram-se adequados aos estudantes de matemática que começam a estudar a teoria (...) em vez de uma reta numérica devemos imaginar duas, um sistema numérico K de 'constantes' e um sistema maior, de 'quantidades' " (TALL, 1982).[12] Contudo, são axiomas para transferir a validade das formulações em um ir e vir de constantes para quantidades. Novamente aqui encontramos uma tentativa de anular as concepções espontâneas dos alunos, que já são naturalmente infinitesimais, para ali implantar um saber formal, ao invés de reforçar essas concepções dando ouvidos ao aluno que as manifesta e conduzindo-o a precisá-las cada vez mais.

O problema com as tentativas de legitimar os objetos de ensino é que elas devem ser referendadas, em última instância, pelas instituições em que os cursos são ministrados. Legitimar um objeto é uma mudança em suas relações para uma instituição de modo que "ele apareça como transparente e natural" (CHEVALLARD, p. 89, 1992).[13] É a universidade, não o professor ou o aluno, que proverá o foro para legitimar o saber ensinado. Para que um conhecimento receba suporte pelos matemáticos e seja reconhecido como saber legítimo a ser objeto de ensino é preciso que esse conhecimento se enquadre no âmbito das certezas providas pela matemática do século 20. A partir desse enquadramento a instituição, através de seus órgãos colegiados, verbaliza, sob forma de programas e ementas, a transposição didática, que garante a identidade do saber erudito ou oficial com as aplicações em cursos técnicos.

Porém, quando as instituições focalizam a transposição didática, logo surge o problema que apareceu claramente nos textos como os propostos por Keisler (1986) e Sousa Pinto (2000): são tentativas dos matemáticos de ensinar análise em cursos de cálculo. Assim, a instituição de ensino superior convive com uma contradição em termos do ensino requerido para cursos como os de engenharia: como são os departamentos de matemática que se encarregam de ministrar cálculo, o professor ensina apenas pela via dos limites, ao passo que o aluno, os professores e os textos das disciplinas profissionais justificam pela via dos infinitésimos.

No que se refere às práticas de sala de aula, não temos o objetivo de legitimar os infinitésimos em nível do cálculo, levando a instituição a aceitar, ou, mesmo, a meramente reconhecer essa modificação. Pelo contrário, valendo-nos de nossa margem de liberdade como professores, tentamos assegurar ao aluno a validade de suas concepções espontâneas sobre infinitésimos e as estimulamos em seu relacionamento com o objeto de ensino. Por exemplo, na primeira vez que os alunos encontram o sinal $\approx$, eles perguntam o que isso significa. Respondemos *en passant*: "significa infinitamente próximo", ao que eles retrucam "ah, sim"; isso lhes basta. A eterna questão de saber se o "limite chega ou não chega" desaparece completamente quando respondemos: "antes de chegar, fica infinitamente próximo". Apresentamos a "função" delta de Dirac através dos limites usuais, mas ela só fica clara para os alunos quando dizemos que é uma função nula em toda parte, exceto em um intervalo infinitesimal de comprimento dx, onde vale $1/dx$. Procuramos garantir que, antes da reta real (contínuo magro), existiu a reta numérica de Leibniz e Cauchy (o contínuo espesso), que se tornou reconhecida pelo rigor matemático a partir dos anos sessenta. Esse é nosso modo de introduzir a história na classe.

O reconhecimento em última instância da legitimidade dos infinitésimos como objeto de ensino em cursos de cálculo pela instituição universitária ainda está por ser feito. Entretanto, pela aceitação dos alunos, pela presença dos raciocínios infinitesimais nas disciplinas profissionais e pela legitimidade matemática assegurada por Robinson (1966), podemos supor que esse objeto não será declarado ilegítimo como objeto de ensino e que não seremos proibidos de continuar nossas experiências didáticas com ele. Pelo contrário, imaginamos que outros colegas poderiam juntar-se a nós (www.gritee.com) em outras instituições de ensino.

O passo final para o reconhecimento da legitimidade dos infinitésimos como objeto de ensino certamente passa pelo reconhecimento dos matemáticos, que, via de regra, reconhecem a análise não *standard* como uma área da matemática, diferente da sua própria, não como a introdução ou recuperação de uma maneira universal de pensar o contínuo. Essa dificuldade é aumentada porque, tendo a análise não *standard* nascido na área da lógica, é exposta em termos dos princípios de transferência, o que exige uma formalização do raciocínio pouco comum entre os matemáticos (STROYAN; LUXEMBURG, 1976). Seria preciso introduzir disciplinas de análise não *standard*, inicialmente optativas, nos cursos de bacharelado em matemática e desenvolvê-las sem exigir o princípio de transferência, tornando natural a construção dos números hiper-reais (contínuo espesso) e focando os teoremas que garantem as validade dos instrumentos usados no cálculo, como a derivação, a integração e os teoremas fundamentais do cálculo (LINDSTROM, 1988). A geração dos futuros matemáticos seria, assim, mais receptiva aos infinitésimos. Diferentemente do que acontece em nível da análise, conforme observou Harnik em 1986, muito trabalho para introduzir o cálculo através dos infinitesimais em classes ainda estaria por ser feito.

TERCEIRA QUESTÃO: A SEQÜÊNCIA DIDÁTICA E AS CONCEPÇÕES TEMPORÁRIAS

"Em 1684 Leibniz introduziu a notação que sobreviveu até hoje, tomando dx como um infinitesimal qualquer e definindo $dy = f'(x)\,dx$" (TALL, 1980a).[14]

Essa afirmação contradiz alguns trabalhos de Leibniz, como, por exemplo, "$(y+dy)^{x+dx} = z + dz$" (LEIBNIZ, 1983, p. 44). Laugwitz (1977, p. 447-8) nos diz que em seus últimos trabalhos Leibniz definiu $dx{=}x\,(t{+}dt){-}\,x\,(t)$ e procede pragmaticamente para ignorar os infinitésimos no fim. Fazemos dessa definição o centro de nossa seqüência didática. Aderimos à notação de Robinson (1966, p. 79-80):

$$dy = df = f\,(x + dx) - f(x)$$

Escrevemos $dy \approx f'(x)dx$ e definimos a derivada como a *constante de quase proporcionalidade* entre o incremento da variável e o incremento da função. Assim, para Leibniz, Robinson e para nosso ensino, $dy = y(x+dx) - y(x)$. Por exemplo,

$$d(x)^2 = (x+dx)^2 - x^2 = 2\,x\,dx + (dx)^2$$

portanto $\frac{dy}{dx} = \frac{d(x)^2}{dx} = 2\,x + dx \approx 2x = y'(x)$, ou seja, o quociente de infinitésimos $\frac{dy}{dx}$ não é a derivada $y'(x)$, mas está infinitamente próximo dela, e a igualdade que Tall (1980) diz ser a definição de Leibniz deveria ser escrita $dy \approx f'(x)\,dx$.

Ao identificar $dy = f'(x)\,dx$ no afã de conservar a tradição da matemática do século 20 para a qual $\frac{dy}{dx}$ e $y'(x)$ são sinônimos, perdemos a vantagem dos cálculos algébricos diretos Leibnizianos e ficamos com as desvantagens dos livros didáticos modernos que constituem quebra-cabeças para os alunos. Por que, algumas vezes, dx é "pequeno" e, outras vezes, $dx = \Delta x$, enquanto $dy \neq \Delta y$? Se dx é uma variável real, por que não usar apenas uma letra para ela ao invés de duas? Por que algumas vezes $\frac{dy}{dx}$ é um símbolo indivisível e, outras vezes, dx pode ser transportado para o outro membro da igualdade, como é o caso de certos métodos de resolução de equações diferenciais? Se dx na expressão $\int f(x)dx$ apenas indica a variável de integração, por que usá-lo mesmo quando existe apenas uma variável na integral? Logo, o aluno do curso de engenharia aprende que o elemento de trabalho é $F\,dx$, e nisso faz uma grande diferença se dx é medido em polegadas ou em centímetros. O mesmo dx que algumas vezes nada significa, como ocorre nas integrais, que outras vezes é tratado como uma variável real, outras vezes como parte de um símbolo indivisível, de repente torna-se uma grandeza com dimensão física. Finalmente, o aluno espantado pergunta ao professor por que ele está escrevendo $\frac{d^2y}{dx^2}$ e não $\frac{d^2y}{d^2x}$. O professor, de modo geral, não tem a menor idéia do que responder. No ETV, pela via dos limites, parte-se da definição de derivada, que exige toda a estrutura das retas secantes semoventes para fazer algum sentido ao aluno. No segundo, parte-se da definição de diferencial, uma mera diferença, apoiada nas concepções espontâneas dos alunos, para só depois compararem-se diferenças através de um quociente.

Nossa seqüência didática repousa sobre *concepções temporárias*, ajustadas passo a passo ao longo do curso. É aqui que tiramos vantagem do recurso do *zoom* do aplicativo CorelDRAW, conforme mostrado na tela capturada no computador (Figura 1).

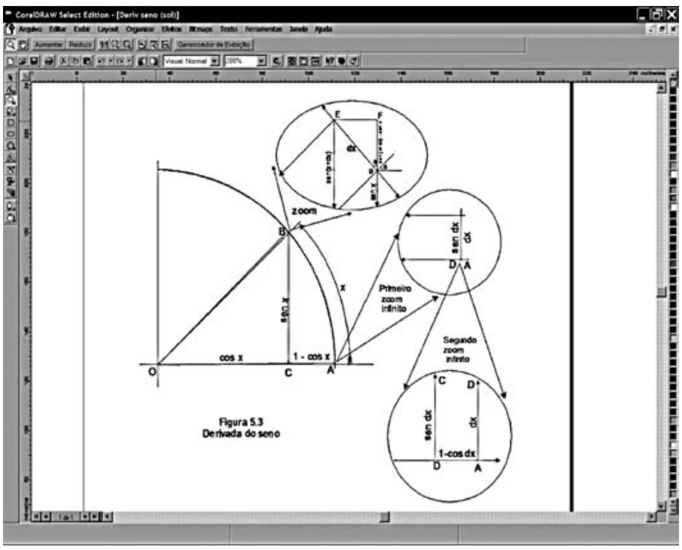


Figura 1: A derivada do seno

A justificativa didática para usar tal recurso é criar uma situação de modo que os gráficos apareçam retificados e os infinitésimos de segunda ordem desapareçam visualmente.

O uso da ferramenta *zoom* do aplicativo CorelDRAW não foi simplesmente uma sofisticação das atividades. Essa ferramenta tornou-se necessária após, em experiências passadas, quando começamos nossas investigações sobre o pensamento infinitesimal, vermos alunos rejeitarem as tentativas de fazer com que desenhassem uma reta tangente a uma curva num ponto de inflexão. Há um caso que guardamos como exemplo que provocou essa mudança na didática. Numa aula para turma de matemática, foi pedido a uma aluna para desenhar sucessivas amplificações de círculos pequenos ao redor do ponto de tangência de uma reta a uma curva, mas, a cada vez, uma curvatura era reproduzida. Poucos meses depois nós a colocamos em frente a um computador e perguntamos a ela o que estava vendo: "Uma linha reta", foi a resposta. Então, manobramos a ferramenta *zoom* até a linha reta se tornar uma curva e a reta tangente consumar um ponto de inflexão. "Ah!" Exclamou a aluna.

Poucos alunos indagam sobre, afinal, o que são esses números infinitesimais. A esses respondemos que *um número hiper-real é uma seqüência de números reais*; precisamente, *é um conjunto de seqüências equivalentes*. Operações de adição e multiplicação e a relação "menor que" são definidas termo a termo. Assim sendo, o número $0,\overline{9}$ é o conjunto das seqüências equivalentes a < 0.9, 0. 99, 0.999, ...>, é diferente e é menor que o número $0,\overline{99}$ que é o conjunto das seqüências equivalentes a <0.99, 0.9999, 0.999999, ...>; estão ambos infinitamente próximos, mas são distintos de 1. Ou seja, na construção dos números hiper-reais, que pode ser fundamentada pela análise não-*standard*, leva-se em conta não só para onde a seqüência converge, mas também uma certa "velocidade" de convergência. Seqüências de "mesma velocidade" são ditas equivalentes. Assim, as seqüências

$$< 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots > \text{ e } < 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots \frac{1}{2^n}, \ldots >$$

fornecem exemplos de infinitésimos positivos, mas o primeiro é maior que o segundo. Raramente algum aluno nos pede esse nível de precisão dos conceitos. A maioria convive bem com nossa diretriz de não questionar, pelo contrário, estimular, suas concepções espontâneas infinitesimais.

Há cerca de 14 anos fizemos nossas primeiras tentativas de introduzir os infinitesimais para alunos de Física e de Engenharia Mecânica para os quais ministramos Cálculo Diferencial e Integral I quando ainda lecionávamos na UNESP. No princípio colocávamos os alunos em situações de escolha para que eles pudessem ter suas justificativas legitimadas, sem prejuízo da abordagem tradicional do tópico limites. O contato e a observação contínua de respostas de alunos de cursos denominados de "serviço", levou-nos a sistematizar o trabalho com os infinitesimais no cálculo como opção política na educação matemática. Apresentávamos as duas versões dos conceitos, por limites e por infinitésimos, e deixávamos à escolha dos alunos qual delas nos devolveriam nas provas escritas. A maioria preferia os infinitésimos, principalmente os que tinham mais facilidade no curso todo; os que escolhiam limites tinham índice de acerto bem inferiores. Agora já temos exigido que os alunos nos devolvam as próprias concepções infinitesimais, principalmente na montagem das integrais para cálculo de áreas, volumes, trabalho, força hidrostática, momento de inércia, campo e potencial elétricos.

Entretanto, não consideramos que os raciocínios pela via dos infinitésimos devam excluir a noção de limite. As duas noções devem fazer parte da formação matemática do engenheiro, porque em muitos raciocínios dos livros das disciplinas profissionais, especialmente quando se trata de variáveis que tendem ao infinito, a via dos limites é mais compreensível. Mas jamais os infinitésimos deveriam ter sido excluídos, como é o caso do ETV.

PROPOSTA PARA O CURSO DE ENGENHARIA EM SISTEMAS DIGITAIS

Hoje o trabalho de recuperar os infinitésimos ocorre em componentes curriculares de matemática para um curso de Engenharia em Sistemas Digitais da UERGS, Unidade de Guaíba, onde somos professores desde 2002 quando foi criado o curso. A UERGS foi projetada intencionalmente sem a estrutura departamental. Foi organizada em torno de cursos em que as componentes curriculares de matemática são solicitadas a abordar tópicos relativos às aplicações profissionais. Assim, todas as componentes curriculares ou disciplinas gravitam em torno da imagem de um profissional específico que se quer formar, a saber, o engenheiro em sistemas digitais. As ênfases envolvidas nessa formação demandam que seja realizado um trabalho de formação consistente nas disciplinas que lidam com o tópico circuitos elétricos.

SALA DE AULA, ALUNOS E ENCAMINHAMENTOS

As turmas têm no máximo 40 alunos. Na unidade de Guaíba não há anfiteatros nem carteiras universitárias; as salas são amplas e providas de mesas facilmente deslocadas para formação de grupos. Uma das salas é equipada com computadores para cada dois alunos. Nas disciplinas ministradas pelos autores, adota-se a pedagogia da Assimilação Solidária: pontuação pelo tempo de trabalho em grupo diante da tarefa de aprendizagem (CABRAL; BAL-

DINO, 2004). Procura-se pôr o aluno na posição de falante segundo o aforismo “é ouvindo que se ensina e falando que se aprende” (CABRAL, 2004).

Os alunos são inseridos em vários pontos do livro-texto (STEWART, 2001) através de fichas de trabalho (FTs) interativas, construídas na forma *problema-encaminhamento-solução*. Um projeto de pesquisa (E-M@T, 2005), fomentado por um grupo de pesquisa constituído por docentes e discentes de três unidades da UERGS, busca estender essa pedagogia para amparar a adoção de ambientes tecnológicos em aulas presenciais e promover um ambiente de trabalho entre os docentes que seja de caráter multidisciplinar. Como universidade nova, a UERGS escapa à vigilância de se ter de manter a tradição de abordagens didática e pedagógica discutidas neste trabalho. Como professores de matemática, sentimo-nos livres para ensinar cálculo infinitesimal.

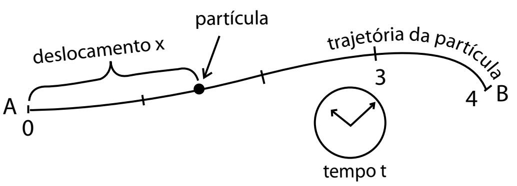
EXEMPLOS DE ATIVIDADES

Em todas as turmas trabalhamos com a mesma pedagogia, observadas as características próprias de cada uma. No trabalho com as FTs, quando os alunos esgotam as possibilidades de convencimento relativamente aos infinitesimais, são encaminhados para ver o que acontece no *zoom* do computador [15] onde um certo ambiente está preparado. Observamos que, como dito antes, as FTs cumprem o papel, entre outros, de introduzir o aluno no livro texto adotado. Daí que sempre são indicados parágrafos onde o objeto matemático trazido pela FT para a sala de aula pode ser encontrado pelo aluno ao longo do livro. Admitimos que o trabalho deva tomar como ponto de partida as concepções espontâneas ou intuitivas que, sabemos, povoam a sala de aula, para passar pelas concepções temporárias ou provisórias até que os alunos possam, finalmente, e naturalmente, acolher concepções definitivas na forma das definições e abstrações. Fazemos questão de que os alunos se vejam tomados por suas próprias idéias; tratamos de criar condições para que sejam trazidas ao simbólico o material que suporta a crença do aluno em algo da ordem de uma “poeira” que está entre $0,999\ldots$ e 1.

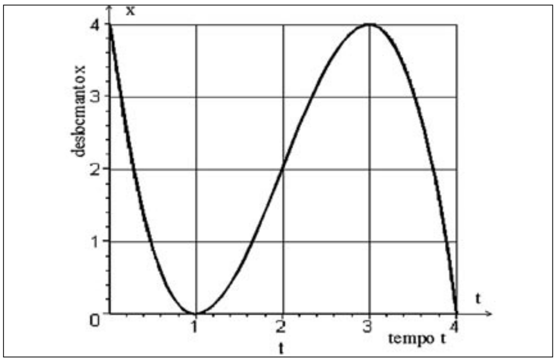
FT – Velocidade instantânea[16]

“Problema 1 (Stewart, §2.1, p. 85 a 89, § 2.7, e 2.8, p. 147 a 163)

Uma partícula move-se sobre uma trajetória de 4 metros de comprimento segundo a figura abaixo.



O movimento é dado pelo gráfico *deslocamento-tempo* da figura seguinte:



O *deslocamento x* é a distância da partícula ao ponto *A*, medida em metros ao longo da trajetória. O tempo *t* é medido em segundos de acordo com os ponteiros de um relógio. Em nosso exemplo, o deslocamento é dado *em função do* tempo pela seguinte *fórmula*:

$$x(t) = -t^3 + 6t^2 - 9t + 4$$

a) Segundo o gráfico, descreva como se processou o movimento.

b) Qual a *variação do deslocamento* entre $t = 0$ e $t = 4$? Qual a distância total percorrida pela partícula entre $t = 0$ e $t = 4$?

c) Calcule a *velocidade média* entre os instantes $t = 2$ e $t = 3,5$.

d) Determine a velocidade instantânea no instante $t = 2$.

e) Determine a velocidade instantânea nos instantes $t = 0$, $t = 1$, $t = 3$, e $t = 4$.

f) Faça o gráfico velocidade-tempo.”

No encaminhamento dissemos que a “velocidade instantânea” *é a velocidade média quando as variações de tempo e deslocamento tornam-se infinitesimais*. Essa definição foi o primeiro contato dos alunos com o conceito de derivada. Eles já tinham calculado as diferenciais de várias funções elementares como $x^2, x^3, \sqrt{x}, 1/x, 1/x^2, 1/\sqrt{x}$ e já tinham passado pela chamada FT20, uma ficha que traz as regras de diferenciação das funções elementares em forma simbólica, de um lado, e em Português corrente, do outro. Tratava-se, agora, de levá-los à expressão do conceito de derivada em termos físicos e geométricos, como velocidade instantânea e coeficiente angular (inclinação) da reta tangente. A definição tem a vantagem de aproveitar o conceito de velocidade média que os alunos trazem e passar à velocidade instantânea, que provisoriamente identificamos com a derivada, por meio de uma consideração de deslocamentos infinitesimais – como nos radares que medem os excessos de velocidade nas estradas.

Uma vez expresso o conceito, trata-se de passar a seu cálculo efetivo. Ora, não se podem medir deslocamentos infinitesimais no gráfico dado. Entretanto, pode-se “ver” o que ocorre em uma vizinhança infinitesimal do ponto $(t, x(t))$, imaginando que se examina esse ponto com um microscópio de poder infinito (o balão na parte de baixo da figura). A imaginação é auxiliada com o *zoom* de quatro mil vezes do CorelDRAW, como na Figura 2. "Vêem-se" a curva e a reta tangente coincidirem nessa vizinhança. Então, o dx da curva confunde-se com o dx da reta tangente e o aluno concorda de pronto que $v_{inst} = \frac{dx}{dt}$ pode ser avaliada pela relação $\frac{dx}{dt}$ *da reta tangente*. Recua-se, então, o *zoom* e calcula-se $\frac{dx}{dt}$ medindo segmentos finitos $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ sobre a reta tangente, evocando o teorema de Tales. A partir daí, o cálculo gráfico da derivada segue o roteiro: traçar a reta tangente, medir Δx e Δt, dividir Δx por Δt. A necessidade de determinar a velocidade dividindo a diferencial de $x(t)$, calculada pelas regras de diferenciação, por dt é apresentada como a questão de obter precisão que o cálculo gráfico não permite.

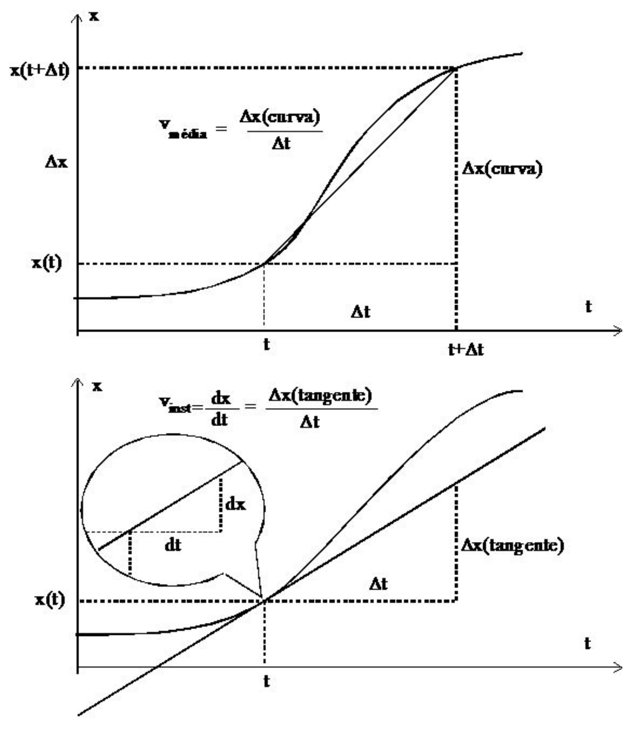
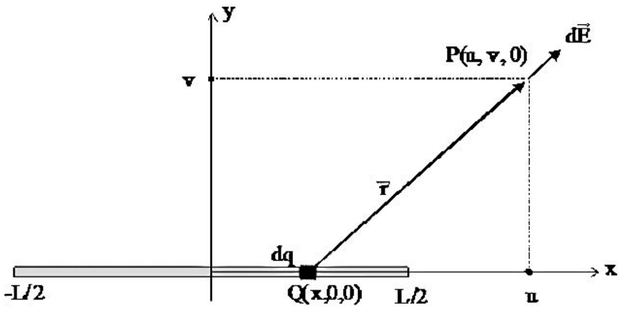


Figura 2: A velocidade instantânea

FT – Campo elétrico[17]

"Problema 2 [Tipler, p. 30]

"Considere uma barra delgada de comprimento L (metros) carregada uniformemente com densidade de carga λ coulombs por metro, situada em um sistema de coordenadas com origem no meio da barra e eixo x coincidente com o eixo da barra. Determine o campo elétrico em um ponto $P(u, v, 0)$ situado em um ponto qualquer do plano xy (figura 2 do problema)."



Com esse problema procuramos pôr o aluno diante do desafio de ter de calcular o campo elétrico de uma barra e pensar em como a carga da barra está distribuída. No encaminhamento é proposto que seja considerada a barra decomposta em uma infinidade de elementos de comprimento infinitesimal dx. "Em cada elemento tem-se uma carga infinitesimal $dq = l\, dx$ que pode ser pensada como concentrada em um ponto de abscissa x, genérica (figura 2 do problema)".

O aluno, munido de suas concepções infinitesimais e diante do encaminhamento, aceita que cada uma dessas cargas pode produzir no ponto dado P um campo elétrico infinitesimal anotado $d\mathbf{E}$. Naturalmente, o aluno vislumbra que o campo resultante em P possa ser a soma vetorial de um número infinito de parcelas infinitesimais, cada uma valendo $l\, dx$ e situada no ponto de abscissa variável *x*, e que essa soma se estende de uma extremidade a outra da barra.

É nesse ponto que a notação criada por Leibniz é introduzida para expressar somas infinitas; é dito que o símbolo $\int$ é "uma letra 's' alongada que se lê 'integral de'". Em verdade, o símbolo já foi usado antes no curso para indicar as primitivas de uma função.

O encaminhamento prossegue indicando como usar o símbolo "(...) os limites de integração se escrevem abaixo e acima do sinal de integral. Então: $\mathbf{E} = \int_{x=-L/2}^{L/2} d\mathbf{E}$. Expresse as componentes de E como integrais".

Na folha de solução, distribuída aos alunos depois de certo tempo de trabalho, pode-se ler: "Para resolver as duas integrais que aparecem você deve esperar por Mat II ou olhar a tabela de integrais no final do Stewart, vol 1". Para nossa surpresa, os alunos quiseram saber como fazer para resolver as integrais. Não quiseram olhar nem quiseram esperar. A provocação surtiu o efeito de um desafio, pois métodos de integração só são trabalhados na componente curricular Matemática II, no período subseqüente.

CONSIDERAÇÕES

Nosso referencial teórico, sustentado pela psicanálise de orientação lacaniana e pelos fundamentos hegelianos, permite-nos adotar outra postura pedagógica. Ouvimos atentamente o aluno em seus deslizes, acolhemos suas concepções e interpretamos suas falas em situações de atender às demandas por nós colocadas como preferências por objetos finitos e infinitos. As avaliações cognitivas que fazemos e que indicam diagnósticos para tratar das dificuldades de aprendizagem são separadas dos processos promocionais, que visam, simplesmente, em termos institucionais, deixar ou não que o aluno prossiga de um período letivo a outro. As avaliações nos têm servido para propor atividades que mantenham o aluno em constante desafio. A proposta pedagógica que introduzimos na Unidade de Guaíba da UERGS, no curso de Engenharia em Sistemas Digitais, tem por objetivo construir e oferecer um leque de imagens para que o aluno possa efetuar sua própria escolha. Com tal leque de imagens esperamos que o aluno queira se inserir no grupo de trabalho, queira mudar seu modo de lidar com matemática, queira tomar para si a imagem de ser profissional.

Mas a pedagogia não caminha sem uma didática e, relativamente aos conteúdos abordados, dizemos que o conceito de limite e suas formulações epsilônticas atuais encontradas nos livros didáticos, a apresentação weierstrassiana, é uma forma de pensamento finito uma vez que inclui o sujeito e suas justificativas. Por outro lado, os infinitésimos, na seqüência didática que estamos discutindo em nossa experiência, visando a um curso de cálculo para aluno em início de formação, requerem a presença deste que experimenta modificações em sua aprendizagem. É nesse sentido que as falas do aluno trazem nas justificativas preferências ou concepções de caráter intuitivo e de caráter temporário. Desse modo e em situações de aprendizagem como as que descrevemos, os objetos infinitésimos são uma forma de pensamento infinito, pensamento dialético. Cabe observar que em outro nível, como o de um curso de análise, por exemplo, os infinitésimos têm o caráter de objeto finito exatamente porque são definidos através da análise *não-standard*, recaindo na teoria weierstrassiana.

Aprendemos com casos semelhantes a este que o *zoom* como ferramenta didática auxiliar pode ser explorado no CorelDRAW, conforme ressaltamos, oferecendo condições de trabalho para sustentar as idéias trazidas pelo aluno sem perder de vista os objetos profissionais.

O exemplo que trazemos na Figura 1 está em uma ficha de trabalho referente à justificativa que construímos quando os alunos perguntam por que a derivada do seno é o cosseno. É pedido aos alunos que preencham os balões antes de olharem o *zoom* no computador. Diante do computador uma imagem é construída: quando no primeiro *zoom* dx torna-se visível, a origem está infinitamente longe e, quando no segundo zoom $1-\cos dx$ é tornado visível, dx é infinitamente grande. Essas imagens formadas são concepções temporárias que consideramos necessárias para o trabalho final de finitização, momento em que as concepções dão lugar às definições, idéias constituídas no processo que finaliza com a evidência de uma lógica positivamente racional.

Na experiência de aprendizagem, o que temos observado é que as concepções que são introduzidas durante o primeiro semestre relativas aos infinitésimos permanecem nas componentes curriculares subseqüentes e até são mencionadas e evocadas pelos próprios alunos em outras disciplinas como Física.

As conclusões que temos delineado são as seguintes: *concepções provisórias ou temporárias*, mesmo que matematicamente instáveis, são necessárias para o aluno passar das concepções espontâneas para as definições matemáticas. Ademais, explicações matematicamente corretas e a estratégia de correções imediatas em relação ao que o aluno diz não são adequadas ao crescimento de idéias matemáticas no aluno. Quando os professores impõem essa estratégia, apenas produzem a exclusão dos alunos que estão mais fortemente ligados a suas concepções espontâneas. Não se pode ignorar ou fazer desaparecer a preferência de um sujeito.

Nosso desafio é grande por termos de superar nossas próprias concepções formadas em bancos escolares tradicionais. Como professores de matemática com formação clássica, temos tido o objetivo de superar nossas dificuldades em conversar com colegas engenheiros sobre assuntos que são próprios da engenharia. A opção feita não deixa mais volta; fomentar o trabalho multidisciplinar onde o desejo do aluno de aprender é nosso objeto.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BACHELARD, G. *La formation de l'esprit scientifique*. Paris: Librarie Philosophique J. Vrin, 1980.

BALDIN, Y.; BALDIN, N. Calculadoras gráficas como auxiliar didático no ensino de matemática para as engenharias. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENSINO DE ENGENHARIA, XXIX. *Anais*... Porto Alegre, RS: PUCRS, 2001. CD-ROM.

BALDINO, R. R.; TEIXEIRA, M. V.; SAD, L. A. Cauchy and the problem of point-wise convergence. *Archives Internationales D'histoire Des Sciences*, Liège, Bélgica, v. 51, n. 147, p. 277-308, 2001.

BALDINO, R. R.; CABRAL, T. C. B. A pulsão em um caso de dificuldade especial em cálculo. *Educação & Sociedade*, v. 49, p. 485-500, 1994.

BEER, F. P.; JOHNSTON Jr. E. R., *Mecânica vetorial para engenheiros*. São Paulo: Makron Books, 1994. v. 2.

BUTKOV, E. *Física matemática*. Rio de Janeiro: LTC, 1988.

CABRAL, T. C. B. *Contribuições da psicanálise à educação matemática.* A lógica da intervenção didática em processos aprendizagem. Tese (Doutorado em Educação) - USP, São Paulo, 1998.

CABRAL, T. C. B.; BALDINO, R. R. O ensino de matemática em um curso de engenharia em sistemas digitais. In: CURY, H. N. (Org.). *Disciplinas matemáticas em cursos superiores:* reflexões, relatos e propostas. Porto Alegre: Edipucrs, 2004. p. 139-186,

CAMARGO Jr., J. B.; ALMEIDA Jr., J. R.; CUGNASCA, P. S., A experiência do paradigma da aprendizagem em um curso de engenharia. *Revista Brasileira de Ensino de Engenharia*, v. 23, n.2, p.19-26, 2004.

CAMARGO Jr., J. B.; CUGNASCA, P. S.; ALMEIDA JR., J. R., O treinamento de docentes para o ensino cooperativo de engenharia – foco no aprendizado do aluno. In: COBENGE, XXXI. 2003. *Anais*... CD-ROM.

CARVALHO, A. M. T.; CABRAL, T. C. B. Teacher and students: setting up the transference. *For the Learning of Mathematics*, USA: Kingston, v. 23, n. 2, p. 11-15, 2003.

CHEVALLARD, I. *Aspects d'un travail de théorisation de la didactique des mathématiques*. Faculté des Sciences de Luminy, Université d'Aix-Marseille II, 1989.

CONCEIÇÃO, K. da; GONÇALVES, M. B. A resolução de problemas no processo ensino-aprendizagem de matemática nos cursos de engenharia. In: COBENGE, XXXI. 2003. *Anais*... CD-ROM.

CORNU, B. Limits. In: TALL, D. (Org.). *Advanced mathematical thinking*. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1991.

CURY, H. N. (Org.). *Disciplinas matemáticas em cursos superiores:* reflexões, relatos e propostas, Porto Alegre: Edipucrs, 2004. p. 139-186.

CURY, H. N. Análise de erros e análise de conteúdo: subsídios para uma proposta metodológica. In: SIPEM, II. 2003. *Anais*... CD-ROM.

CURY, H. N. Análise de erros em cálculo diferencial e integral; resultados de investigações em cursos de engenharia. COBENGE, XXXI. 2003. *Anais*... CD-ROM.

DZIEDZIC, M. et al., Nivelamento em matemática para os cursos de engenharia do UNICENP. CONGRESSO BRASILEIRO DE ENSINO DE ENGENHARIA, XXIX. *Anais*... Porto Alegre: PUCRS, 2001. CD-ROM.

FLEMMING, D. M. O ensino de cálculo nas engenharias: relato de uma caminhada. In: CURY, H. (Org.). *Disciplinas matemáticas em cursos superiores:* reflexões, relatos e propostas. Porto Alegre: Edipucrs, 2004.

FRANCHI, R. H. de O. Enfrentando as falhas na formação básica dos alunos ingressantes. In: COBENGE, XXXI. *Anais*... 2003. CD-ROM.

FOURIER, J. B. J. *The analytical theory of heat*. Dover Pub. Inc., 2003.

GONÇALVES, E. M.; CHUERI, V. M. M.; SARCOMAN, M. A. R. Uma ferramenta computacional para o ensino de funções nos cursos de engenharia. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENSINO DE ENGENHARIA, XXX. *Anais*... Piracicaba, SP: UNIMEP, 2002. CD-ROM.

HARNIK, V. Infinitesimals from Leibniz to Robinson. Time to bring them back to school. *The Mathematical Intelligencer*, New York: Springer-Verlag, v. 8, n. 2, 1986.

KEISLER, J. *Elementary calculus:* an infinitesimal approach. Boston: PWS Pub, 1986.

KUEHN, A.; BAZZO, W.A., O que queremos da educação tecnológica? *Revista Brasileira de Ensino de Engenharia*, v. 23, n. 2, p. 9-17, 2004.

LEIBNIZ, G. G. *Oeuvre concernat le calcul infinitésimal*. Paris: A. Blanchard, 1983.

LINDSTROM, T. An invitation to nonstandard analysis. In: CUTLAND, NIGEL. (Ed.). *Nonstandard analysis and its applications.* London: London Mathematical Society, 1988.

LODER, L. L. Epistemologia versus pedagogia: o locus do professor de engenharia. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENSINO DE ENGENHARIA, XXIX. *Anais*... Porto Alegre: PUC 2001. CD-ROM.

MENDES FILHO, L. A. M. et al. Inovações tecnológicas no ensino: contribuições teóricas. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENSINO DE ENGENHARIA, XXIX. *Anais*... Porto Alegre: PUCRS, 2001. CD-ROM.

MENESTRINA, T. C.; GOUDARD, B. Atualização e revisão pedagógica de cálculo e álgebra: concepções e atitudes inovadoras. COBENGE, XXXI. *Anais*... 2003. CD-ROM.

MILANI, R.; BALDINO, R. R. The theory of limits as an obstacle to infinitesimal analysis. *Proceedings of the 26th annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* v. 3, p. 345. A. D. Cockburn and E. Nardi, Eds. University of East Anglia, 2002.

MORAES, A. A. T. P. de; MENDONÇA, D. R. de. Ambiente eletrônico para ensino de cálculo em engenharia. In: COBENGE, XXXI. *Anais*... 2003. CD-ROM.

NASCIMENTO, J. L., Uma abordagem para o estudo de limites com uso de pré-conceitos do cálculo diferencial e integral. In: CONGRESSO BRASILEIRO

DE ENSINO DE ENGENHARIA, XXIX. *Anais...* Porto Alegre: PUC, 2001.

PEREIRA, V. M. L.; CARVALHO, L. M. P. Uso de projetos no ensino de cálculo. In: COBENGE, XXXI. *Anais...* 2003. CD-ROM.

PINTO, M. F.; GRAY, E. M., Difficulties in teaching mathematical analysis to non-specialists. *Proceedings of the 19th International Conference for the Psychology of Mathematical Education* v. 2, p. 18-25. Recife, Brazil, 1995.

PROJETO E-M@T – Ambiente Interativo Multidisciplinar para Educação nas Engenharias. Disponível em: www.gritee.com. <Acesso em: out. de 2005>.

ROBINSON, A. *Non-Standard Analysis*. Amsterdam: North Holland, 1966.

SOARES, E. M. do S. Autoavaliação e aprender a aprender, no contexto da aprendizagem de matemática para engenharia. In: COBENGE, XXXI. *Anais...* 2003. CD-ROM.

STROYAN, K. D.; LUXEMBURG, W. A. J. *Introduction to the theory of infinitesimals*. New York, Academic Press, 1976.

STEWART, J. *Cálculo*. São Paulo: Pioneira, 2001.

TALL, D. A versatile theory of visualisation and symbolisation in mathematics. Plenary Presentation at the *Comission Internationale pour l'Étude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques*, Toulouse, France, July, 1994.

TALL, D. Elementary axioms and pictures for infinitesimal calculus. *Bulletin of the IMA*, v. 18, p. 43-48, 1982.

TALL, D. Intuitive infinitesimals in the calculus. *Proceedings of the Fourth International Congress on Mathematics Education*, Berkeley, p. 170-176, 1980a.

TALL, D. Looking at graphs through infinitesimal microscopes, windows and telescopes. *Mathematical Gazette*, 64, p. 22-49, 1980b.

ZUCHI, I.; GONÇALVES, M. B. Investigação sobre os obstáculos de aprendizagem do conceito de limite. In: COBENGE, XXXI. *Anais...* 2003, CD-ROM.

NOTAS

[1] A convite do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UNESP, Rio Claro, o professor Gratan-Guinness, educador e historiador da matemática da Universidade de Middlesex, UK, proferiu conferência no dia 8 de abril, terça-feira, de 14 às 16 horas, no Auditório do Departamento de Matemática, no ano de 1997.

[2] Uma observação mais atenta de livros textos e ementas mostra que alguns cursos de cálculo ganham uma "roupagem" de análise e termina-se tentando ensinar esse assunto para quem ainda não aprendeu cálculo (CABRAL, 1998).

[3] Os limites são calculados por operações algébricas e por substituição de valores da variável em funções reconhecidamente contínuas, as derivadas por regras de derivação e as integrais pelo teorema fundamental do cálculo.

[4] "...les professeurs... ne comprennent pas qu'on ne comprenne pas" (Bachelard, 1980).

[5] Comunidades referenciadas: ABENGE, responsável por organizar os Congressos Nacionais de Ensino de Engenharia (COBENGE); SBMAC, que organiza os Congressos Nacionais de Matemática Aplicada e Computacional (CNMAC), e SBEM, organizadora dos Encontros Nacionais de Educação Matemática (ENEM) e dos Simpósios Internacionais de Pesquisa em Educação Matemática (SIPEM).

[6] Ainda é comum encontrarmos em uma sala alunos procedentes de cursos de engenharia, física, matemática, economia, geologia, todos juntos assistindo a aula de cálculo diferencial. A estrutura de departamentos, organização comum à maioria das instituições de ensino superior, provê professores de matemática para ensinar cálculo independentemente do curso ao qual se poderia destinar a matéria e onde aplicações, modelagens resolução de problemas seriam importantes.

[7] Afirmação feita por uma aluna de um curso de pós-graduação ao refazer seus estudos em Cálculo Diferencial.

[8] Aluna do curso de informática da UNESP, Rio Claro, 1992.

[9] *"Infinitesimal notions prove a natural way to express the basic ideas of calculus and analysis"* (Tall, 1982).

[10] Afirmação de um aluno durante uma aula de Matemática II na UERGS, em regime de dependência, ao lidar com limites.

[11] "Every real statement that holds for one or more particular real functions holds for the hyper-real natural extensions of these functions" (Keisler, p. 28, 1986).

[12] "(...) proved suitable for mathematics students beginning to study the theory (...) instead of one number line we must imagine two, a number system K of 'constants' and a larger system K* of 'quantities'" (Tall, 1982).

[13] "it appears transparent and natural (allant de soi)" (Chevallard, p. 89, 1992).

[14] "*In 1684 Leibniz introduced the notation which has survived to the present day, taking* dx *to be any infinitesimal and defining* $dy = f'(x)\,dx$" (Tall 1980a).

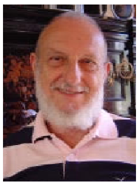
[15] Como o CorelDRAW é um aplicativo de código proprietário e a instituição não possui uma licença de uso, para resolver o problema, adquirimos uma licença e levamos um *notebook* próprio para desenvolver o trabalho nas turmas.

[16] Esta FT foi introduzida em setembro de 2005 para a turma de calouros da componente curricular Matemática I.

[17] Atividade introduzida ao final do 1º semestre de 2005, para a turma de calouros na componente curricular Matemática I. O problema de determinar o campo elétrico de uma carga pontual tinha sido tratado um pouco antes para essa mesma turma na componente curricular Geometria Analítica.

DADOS BIOGRÁFICOS DOS AUTORES

Tânia Cristina Baptista Cabral
Educadora matemática, pesquisadora FAPERGS e professora colaboradora no curso de Engenharia em Sistemas Digitais, Unidade de Guaíba, Universidade Estadual do Rio Grande do Sul (UERGS).
Coordenadora do Grupo de Pesquisa em Inovações Tecnológicas para Educação em Engenharia – GrITEE – www.gritee.com – da UERGS.
Membro da Escola Brasileira de Psicanálise – Seção São Paulo.
Atuação nas interfaces: (a) Educação Matemática e Psicanálise e (b) Educação Matemática, Educação em Engenharia e Informática na Educação.
Formação: Licenciatura em Matemática pela UFRJ, Mestrado em Educação Matemática pela UNESP e Doutorado em Educação (Didática do Ensino de Ciências e Matemática) pela USP.
E-mail: tania.c.b.cabral@terra.com.br



Roberto Ribeiro Baldino
Docente no curso de Engenharia em Sistemas Digitais, Unidade de Guaíba, Universidade Estadual do Rio Grande do Sul (UERGS).
Membro do Grupo de Pesquisa em Inovações Tecnológicas para Educação em Engenharia – GrITEE – www.gritee.com – da UERGS.
Formação: Engenharia Civil e Eletricista pela UFRGS, Mestrado em Matemática pela Stanford University, Doutorado em Matemática pela Stanford University e IMPA e Pós-Doutorado pela École Polytechnique, Palaiseau, França.
E-mail: rrbaldino@terra.com.br