O ENSINO DE FUNÇÕES, LIMITES E CONTINUIDADE FUNDAMENTADA NA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA

Regiane Slongo Fagundes* – regianefagundes@utfpr.edu.br
Daniela Trentin Nava *– dnava@utfpr.edu.br
Thiago Picinini* – thiagopicinini@alunos.utfpr.edu.br
Gustavo H. Dalposso* – gustavodalposso@utfpr.edu.br

* Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR – Câmpus Toledo
Rua Cristo, 19
CEP 85902-490 – Toledo – Paraná

Resumo: *O trabalho descreve a aplicação da aprendizagem significativa na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral. Essa teoria ressalta que a aprendizagem significativa tem chance de acontecer quando há uma interação não arbitrária e substantiva entre os novos conhecimentos (ideias, proposições, informações, conceitos, símbolos) e os conhecimentos prévios (subsunçores), contribuindo para a sua diferenciação, (re)elaboração e estabilidade. A prática foi embasada no quadro de valores das tarifas de água da SANEPAR (Companhia de Saneamento do Paraná), responsável pelo abastecimento de água e coleta de esgoto no Paraná. A atividade foi proposta com o objetivo de contextualizar a aplicação dos conteúdos funções, limite e continuidade. Foram abordados conceitos de função definida por sentenças e função maior inteiro, usada para discretizar os valores do domínio, limites laterais e continuidade. Por meio do modelo definido foi possível apresentar os conteúdos da disciplina de Cálculo Diferencial Integral sobre uma situação cotidiana dos alunos. Observou-se que ao final da atividade os alunos conseguiram: interagir com colegas e com o professor, identificar conhecimentos prévios, compreender os conceitos abordados mais rapidamente e visualizar outras aplicações práticas.*

Palavras-chave: *Função piso. Função definida por sentenças. Limites Laterais.*

1 INTRODUÇÃO

As Instituições de Ensino Superior têm recebido alunos cada vez mais heterogêneos, não só em relação à faixa etária, mas, sobretudo quanto ao conhecimento específico das disciplinas, no que se refere ao desenvolvimento de competências e habilidades básicas para a permanência no curso superior.

O Cálculo Diferencial e Integral (CDI) é uma das disciplinas que os discentes dos cursos de Engenharias encontram sérias dificuldades. Segundo Diogo et al. (2016), a falta de conhecimentos prévios, as notas baixas, a falta de rotina de estudo e a quantidade de conteúdos desvinculados da prática contribuem para a reprovação e o abandono da universidade.

A metodologia utilizada pelos professores de CDI no ensino superior, em geral, não diferencia da abordagem utilizada no ensino fundamental e médio. Aulas teóricas, com exercícios repetitivos e sem aplicação. Muitos alunos se perguntam: para que aprender Cálculo desta forma? Também se indagam sobre a necessidade de entender certas técnicas, já que o computador pode realizar os cálculos e resolver derivadas e integrais muito mais rapidamente (LOPEZ; SEGADAS, 2014).

Buscar o auxílio de diferentes metodologias educacionais que levem os estudantes a minimizar suas dificuldades de aprendizagem, defasagem de conteúdo e se envolver ativamente no processo de ensino aprendizagem é tarefa precípua de todos os professores que ministram essas componentes nas universidades. É um trabalho árduo, difícil e complexo; porém, possível, importante e extremamente necessário.

Segundo Starck e Ceni Pinto (2018), repensar o papel do professor no ensino superior e o caminho para o desenvolvimento das diferentes dimensões que envolvem a aprendizagem significativa abre espaço para novas práticas, principalmente em cursos da área das exatas com campos de interesse específicos e com ênfase na técnica e no cálculo.

Aqui, entende-se por aprendizagem significativa como sendo o mecanismo humano para adquirir e reservar a imensa quantidade de ideias e informações representadas em qualquer campo do conhecimento. É um processo através do qual, um novo conhecimento é relacionado de maneira não arbitrária e substantiva com a estrutura cognitiva do aprendiz (Ausubel, 2002).

Assim, apresentando uma abordagem diferente para o ensino de funções e limite, foi proposto aos calouros de Engenharia de Bioprocessos e Biotecnologia da UTFPR – Câmpus Toledo/PR, um trabalho embasado na teoria da aprendizagem significativa, usando os valores das tarifas de cobrança de água praticada no estado do Paraná pela SANEPAR (AGEPAR, 2018). O objetivo do trabalho foi aplicar conceitos de conjuntos, domínio e imagem, funções definidas por sentenças, limite e continuidade por meio da análise de uma situação cotidiana dos acadêmicos.

2 A APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA

A Teoria da Aprendizagem Significativa (TAS) foi formulada inicialmente pelo psicólogo norte americano David Paul Ausubel, recebendo colaborações em 1980 de Joseph Donald Novak e Helen Hanesian, acerca de fatores sociais, cognitivos e afetivos na aprendizagem (BRUM; SCHUHMACHER, 2012).

Para Ausubel (2002), a aprendizagem significativa é o processo através do qual uma nova informação (um novo conhecimento) se relaciona de maneira não arbitrária e substantiva (não-literal) à estrutura cognitiva do aprendiz. É no curso da aprendizagem significativa que o significado lógico do material de aprendizagem se transforma em significado psicológico para o sujeito (MOREIRA; MASINI, 1982).

Na TAS, o significado do novo conhecimento vem da interação com algum conhecimento especificamente relevante já existente na estrutura cognitiva do aprendiz com um certo grau de estabilidade e diferenciação. Nessa interação, não só o novo conhecimento adquire significado, mas, também, o conhecimento anterior fica mais rico, mais elaborado, adquire novos significados. Desse modo, a interação entre conhecimentos novos e prévios é a característica chave da teoria (FOGAÇA; MOREIRA, SAHELICES, 2018).

Nessa técnica de aprendizagem, o professor tem tarefa fundamental, pois é o provedor de situações-problema, que devem ser elaboradas cuidadosamente. Ele tem o papel de, no desenrolar das atividades, observar a realização das tarefas, fazendo anotações e, se necessário, intervir de modo a reorientar os alunos quanto às suas possíveis dúvidas, enfim é o organizador e mediador da captação de significados por parte do aluno.

De acordo Klein e Del Pino (2017), o material a ser elaborados pelo professor, em consonância com a TAS, deve respeitar no mínimo duas condições:

- A primeira diz respeito à natureza do conteúdo a ser aprendido, que deve ter significado lógico. A abordagem pedagógica de determinado conteúdo partirá de ideias mais simples até as mais complexas, além de estabelecer relações entre as informações de forma não arbitrária e substantiva às estruturas cognitivas já existentes.
- Já a segunda característica do material a ser elaborado pelo professor refere-se à natureza da estrutura cognitiva do aluno, que deve permitir, por meio de conceitos subsunçores (conhecimentos prévios), uma relação não arbitrária e substantiva entre o novo conhecimento e aquele que já existe.

É importante ressaltar que a aprendizagem significativa, dessa forma, requer um material potencialmente significativo (com significado lógico) e uma pré-disposição do aluno para a aprendizagem. Respeitadas estas duas condições, acredita-se no seu sucesso e na formação de um novo significado, que é chamado por Ausubel e colaboradores de significado psicológico ou idiossincrático fenomenológico, muito particular de cada aluno (AUSUBEL; NOVAK; HANESIAN, 1980).

3 METODOLOGIA DA PRÁTICA PEDAGÓGICA E ALGUNS CONCEITOS

A prática foi aplicada na disciplina de CDI 1 do curso de Engenharia de Bioprocessos e Biotecnologia da UTFPR – Câmpus Toledo, logo no início do semestre letivo de 2018/2. A turma era composta por 44 alunos e para realização da atividade foi dividida em grupos com 4 discentes cada. Os resultados da modelagem permearam o trabalho durante a abordagem do conteúdo de Funções, Limites e continuidade e foi realizado em 3 etapas.

3.1 Etapa 1: A obtenção de modelos matemáticos das contas de água e água/esgoto para Tarifa Residencial e Comercial/Pública

Já na primeira semana foi solicitado aos alunos que obtivessem as informações das tarifas praticadas pela SANEPAR, por meio da leitura da Resolução Homologatória nº 005, do Governo do Paraná (AGEPAR, 2018). Após a leitura detalhada do documento, os alunos retiraram as informações da Tarifa Residencial e Comercial/Público (Quadro 1).

Quadro 1 - Tarifas de saneamento básico aplicado pela SANEPAR – 2018

	TARIFA RESIDENCIAL					
	Até 5m³	**6 a 10**	**11 a 15**	**16 a 20**	**21 a 30**	**>30**
Água	34,58	1,07/m³	5,96/m³	5,99/m³	6,04/m³	10,22/m³
Esgoto (80% consumo água)	27,66	0,86/m³	4,77/m³	4,79/m³	4,83/m³	8,18/m³
Água e Esgoto	62,24	1,93/m³	10,73/m³	10,78/m³	10,87/m³	18,40/m³
	TARIFA COMERCIAL/UTILIDADE PÚBLICA/PODER PÚBLICO					
Água	62,25	1,60/m³	7,93/m³	7,99/m³	8,04/m³	8,10/m³
Esgoto (80% consumo água)	52,91	1,36/m³	6,74/m³	6,79/m³	6,83/m³	6,89/m³
Água e Esgoto	115,16	2,96/m³	14,67/m³	14,78/m³	14,87/m³	14,99/m³

Fonte: Resolução Homologatória nº 005, do Governo do Paraná (AGEPAR, 2018).

Para definir o domínio, a imagem, a função custo e sua representação gráfica, era importante os alunos notarem, primeiramente, que o consumo de água é discretizado no processo. A discretização diz respeito ao processo de transferência de modelos contínuos e equações em homólogos discretos.

Assim, foi importante nessa etapa do trabalho incentivar os alunos pesquisarem o conceito de função parte inteira. Essa função é útil, pois discretiza a variável x, fazendo com que uma função que só seria definida para os inteiros, passe a ser definida para todos os reais.

Até a década de 1960, o "maior inteiro menor ou igual a x" era comumente denotado por $[x]$ (lê-se "colchete de x") e identificado com a "parte inteira de x". Por volta de 1957, o canadense Iverson (1962), então na Universidade de Harvard, desenvolveu uma escrita simbólica para as funções "maior inteiro" e "menor inteiro" que facilitou a compreensão de conceitos matemáticos. Essas simbologias são chamadas de função piso (maior inteiro) e função teto (menor inteiro), e denotadas, respectivamente, por $\lfloor x \rfloor$ e $\lceil x \rceil$ (THOMAS, 2012).

Na modelagem abordou-se a função piso de x, que é o maior inteiro que satisfaz a propriedade de ser menor ou igual a x. Uma formulação ainda melhor resulta da observação de que o conjunto dos inteiros que são menores ou iguais a x é $(-\infty, x] \cap \mathbb{Z}$. Então,

Função piso $\lfloor \quad \rfloor: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ é dada por

$$\lfloor x \rfloor = max\{z \in \mathbb{Z}: z \leq x\}$$

em que "max" significa "o maior elemento de".

Um teorema importante que passará ter significado neste trabalho refere-se às propriedades da função piso (Teorema 1). A compreensão das propriedades auxiliará na construção do conceito de Limites Laterais e continuidade. O Teorema 1 é descrito a seguir:

Teorema 1 (Propriedades do piso): Sejam $x \in \mathbb{R}$ e $t \in \mathbb{Z}$.

$\lfloor \quad \rfloor: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ satisfaz

1. $\lfloor x \rfloor = x \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$;
2. $\lfloor x \rfloor = t \Leftrightarrow t \leq x < t + 1$;
3. $\lfloor x \rfloor = t \Leftrightarrow x - 1 < t \leq x$;
4. $\lfloor \quad \rfloor$ é não-decrescente em $\mathbb{R}$
5. $\lfloor x + t \rfloor = \lfloor x \rfloor + t$;

Analisando os valores apresentados no Quadro 1 é possível perceber que diferentes consumos de água são cobrados por diferentes tarifas. Isso dificultará os alunos definirem uma função única, fazendo-se necessário o uso da função definida por sentenças.

Uma função é definida por mais de uma sentença quando cada uma das sentenças está associada a um subdomínio D_1, $D_2, D_3 \dots D_n$, e a união destes n-subconjuntos forma o domínio D da função original, ou seja, cada domínio D_i é um subconjunto de D (RIMSA, 2016).

3.2 Etapa 2: A obtenção de modelos matemáticos das contas de água e água/esgoto para Tarifa Residencial e Comercial/Público, considerando um domínio contínuo

Nessa etapa, hipoteticamente, foi considerado que o consumo de água era uma variável contínua, ou seja, se uma pessoa consumisse 12,92m^3 o consumo centesimal era cobrado na tarifa do mês. Então, foi orientado aos alunos retirarem a função piso e a reavaliarem os intervalos das sentenças para a tarifa Residencial e também a tarifa Comercial/Público (Quadro 1). Foi determinado o domínio, a imagem e a representação gráfica manualmente.

Posteriormente foi utilizado o R, um *software* de ampla utilização nas ciências exatas e por ser de código aberto recebe contribuições da comunidade científica em geral.

3.3 Etapa 3: O estudo de limite e continuidade

Na terceira etapa utilizou-se as funções definidas nas duas etapas anteriores para abordar a questão de limites laterais e continuidade. Segundo Thomas, et al. (2012), o teste de continuidade indica que uma função é contínua em um ponto interior $x = c$ de seu domínio se, e somente se, obeder às três condições a seguir:

1. $f(c)$existir (c está no domínio de f).
2. $\lim_{x\to c} f(x)$ existir (f possui um limite quando $x \to c$).
3. $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$ (o limite é igual ao valor funcional).

No caso da função $\lfloor x \rfloor$, abordada na modelagem da tarifa Residencial, nota-se que ela descontínua para todo inteiro, porque os limites à esquerda e à direita não são iguais quando $x \to n$ (Teorema dos Limites Laterais):

$\lim_{x\to n^-} \lfloor x \rfloor = n - 1$ e $\lim_{x\to n^+} \lfloor x \rfloor = n$.

Uma vez que $\lfloor n \rfloor = n$, a função maior inteiro é contínua à direita de cada n inteiro, e implica que a função maior inteiro é contínua em cada número real não inteiro (Propriedade do Teorema1).

4 RESULTADOS

4.1 Resultados da Etapa 1: A obtenção de modelos matemáticos das contas de água e água/esgoto para Tarifa Residencial e Comercial/Pública

Inicialmente os alunos observaram que para os primeiros $5m^3$ o valor da conta de água era $R\$\,34{,}58$, independente do consumo. Os mesmos perceberam que a primeira sentença poderia ser definida como constante, ou seja, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, tal que $f(x) = k$ (k, constante real).

Como apenas a parte inteira do consumo é considerada, um consumo de $5{,}99m^3$ é cobrado como $5m^3$, o domínio da função acaba sendo restringido aos inteiros não negativos. Assim, os alunos definiram o primeiro intervalo como sendo fechado em 0 e aberto em $6m^3$.

Note que conceitos de conjuntos numéricos, descrição de conjuntos por compreensão e tipos de funções estão sendo abordados. Desta forma, ao fazer a construção das sentenças matemáticas, o acadêmico estava utilizando todas as propriedades que definem matematicamente a função de uma variável real.

Um ponto importante observado nesse momento da atividade foi em relação à dificuldade que os discentes apresentaram para relacionar e aplicar os conceitos de conjuntos numéricos e suas representações.

Para a construção do próximo intervalo foi necessário observar que o preço por metro cúbico é $R\$\,1{,}07$, mas como $5\,m^3$ já foram considerados, os alunos então precisaram descontar esse valor de entrada, colocá-lo na função piso para discretizar a variável, multiplicá-lo por $R\$\,1{,}07$ e então somar o valor acumulado. Desta forma a sentença encontrada foi $1{,}07\lfloor x - 5 \rfloor + 34{,}58$. O mesmo raciocínio foi aplicado para criar as demais sentenças e seus respectivos intervalos. Observa-se que nesse momento as propriedades do Teorema 1, são utilizadas de forma intuitiva pelos acadêmicos.

A função obtida para descrever a conta de água encontrada ficou como descrita a seguir:

$$g(x) = \begin{cases} 34{,}58, & 0 \le x < 6 \\ 1{,}07\lfloor x - 5 \rfloor + 34{,}58, & 6 \le x < 11 \\ 5{,}96\lfloor x - 10 \rfloor + 39{,}93, & 11 \le x < 16 \\ 5{,}99\lfloor x - 15 \rfloor + 69{,}73, & 16 \le x < 21 \\ 6{,}04\lfloor x - 20 \rfloor + 99{,}68, & 21 \le x < 31 \\ 10{,}22\lfloor x - 30 \rfloor + 160{,}08, & x \ge 31 \end{cases},$$

em que, $D = \{x \in \mathbb{Z} / x \ge 0\}$ e x representa o consumo.

Retomando aos dados do Quadro 1, os alunos adicionaram o valor de 80% para despesa da coleta e tratamento do esgoto. Esse percentual é cobrado de todas as residências urbanas do Paraná, exceto a capital Curitiba, onde o valor é de 85%. A função final para a calcular a conta de água e esgoto para a Tarifa Residencial ficou como segue:

$$f(x)=\begin{cases}62{,}24, & 0\le x<6\\ 1{,}93\lfloor x-5\rfloor+62{,}24, & 6\le x<11\\ 10{,}73\lfloor x-10\rfloor+71{,}89, & 11\le x<16\\ 10{,}78\lfloor x-15\rfloor+125{,}54, & 16\le x<21\\ 10{,}87\lfloor x-20\rfloor+179{,}44, & 21\le x<31\\ 18{,}40\lfloor x-30\rfloor+288{,}14, & x\ge 31\end{cases},$$

em que, $D=\{x\in\mathbb{Z}/x\ge 0\}$ e x representa o consumo.

Os gráficos nessa primeira etapa foram construídos manualmente. Notou-se uma dificuldade extrema em definir os eixos coordenados do plano cartesiano e representar a função de forma discretizada.

Os estudantes utilizaram duas aulas para desenvolver a atividade, sendo a presença do professor diversas vezes solicitada, aspecto que evidencia uma possível motivação para aprender. Assim, o professor passou a ser um organizador e mediador da captação de significados por parte do aluno.

4.2 Resultados da Etapa 2: A obtenção de Modelos Matemáticos das contas de água e água/esgoto para Tarifa Residencial e Comercial/Público, considerando um domínio contínuo

Na abordagem de continuidade, foi proposto considerar o consumo de água como variável contínua. Os alunos perceberam que ocorria mudança no domínio da função, uma vez que $p:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ e que se fazia necessário a retirada da função piso. Assim, novos intervalos para as sentenças foram definidos e a função apresentada ficou como segue:

$$p(x)=\begin{cases}62{,}24, & 0\le x<5\\ 1{,}93(x-5)+62{,}24, & 5\le x<10\\ 10{,}73(x-10)+71{,}89, & 10\le x<15\\ 10{,}78(x-15)+125{,}54, & 15\le x<20\\ 10{,}87(x-20)+179{,}44, & 20\le x<30\\ 18{,}40(x-30)+288{,}14, & x\ge 30\end{cases},$$

em que, $D=\{x\in\mathbb{R}/x\ge 0\}$.

Foi solicitado comparar as Tarifas Residencial $p(x)$ e Comercial/Pública $q(x)$, por meio da análise das funções e encontrar o ponto do domínio a partir do qual a tarifa Comercial/Pública é mais viável em relação à Residencial.

A função $q(x)$ é dada por:

$$q(x)=\begin{cases}112{,}05, & 0\le x<5\\ 2{,}88(x-5)+112{,}05, & 5\le x<10\\ 14{,}27(x-10)+126{,}45, & 10\le x<15\\ 14{,}38(x-15)+197{,}8, & 15\le x<20\\ 14{,}47(x-20)+269{,}7, & 20\le x<30\\ 14{,}58(x-30)+414{,}4, & x\ge 30\end{cases},$$

em que, $D=\{x\in\mathbb{R}/x\ge 0\}$.

Para encontrar o ponto do domínio a partir do qual a tarifa Comercial/Pública é mais viável em relação à Residencial, os alunos plotaram os gráficos em um único plano cartesiano e perceberam que o intercepto do gráfico ocorria em um ponto próximo de $60m^3$. Então, para achar o ponto exato de intercepto, foi igualado as sentenças obtidas em $p(x)$ e $q(x)$ no intervalo o qual 60 estava contido. Assim:

$$18{,}40(x-30)+288{,}14=14{,}58(x-30)+414{,}4$$
$$18{,}40x-263{,}86=14{,}58x-23$$
$$x\cong 63{,}05m^3$$

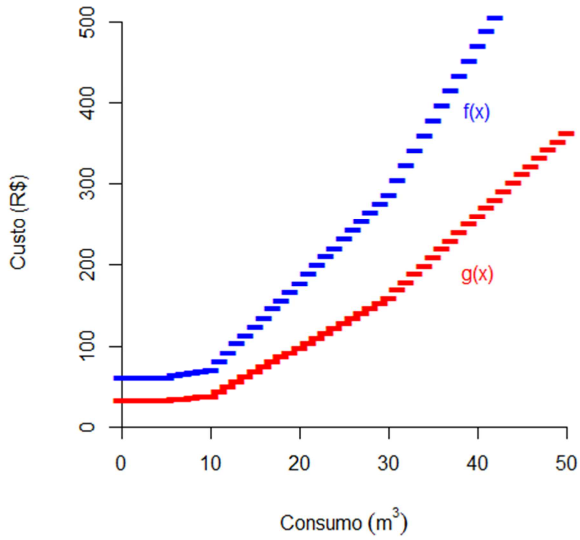
Aplicando o ponto x do domínio na função, os alunos encontraram o valor a ser pago (Imagem) era de $R\$896{,}26$. Portanto, as coordenadas do ponto de intercepto são aproximadamente $(63{,}05m^3,\ R\$896{,}26)$. Na execucução dessa parte da etapa 2, uma aula em sala foi necessária.

Para complementar a etapa 2 foi proposto aos alunos a construção dos gráficos utilizando o *software* R. Assim, laboratório de informática foi utilizado e os alunos foram atendidos em horário diferenciado. A turma foi dividida em duas para facilitar o gerenciamento.

Na representação gráfica definiu-se a função de plotagem, usando a função floor(x). Essa função toma o argumento numérico x e retorna um vetor numérico contendo os maiores inteiros menores que x. Outro aspecto importante foi a necessidade de aplicação dos conceitos de representação dos intervalos `(x>=0)` para definir as sentenças da função. O código do R construído com os alunos está representado no Quadro 2.

Os gráficos contruídos na etapa 1 referentes as funções $g(x)$ e $f(x)$, discretizados, encontra-se na Figura 1. Nesse momento ficou claro aos alunos que o domínio da função $g(x)$ não se alterava em relação a $f(x)$, porém a imagem modificava e sofria um alongamento. Alguns comentários dos alunos se refere a facilidade de visualização ao se construir os gráficos utilizando uma ferramenta computacional.

Figura 1 – Gráficos comparando os valores da conta de água para tarifa Residencial, com a cobrança do serviço de coleta e tratamento de esgoto da função $f(x)$ e sem a cobrança $g(x)$.



Fonte: Autores, 2019

A rotina para construção da Figura 2 se assemelha a apresentada no Quadro 2, porém sem o uso da função `floor(x)`.

Quadro 2- Parte da Rotina do software R para construção da Figura 1

Definindo g(x)	Definindo f(x)	Plotando g(x) e f(x)

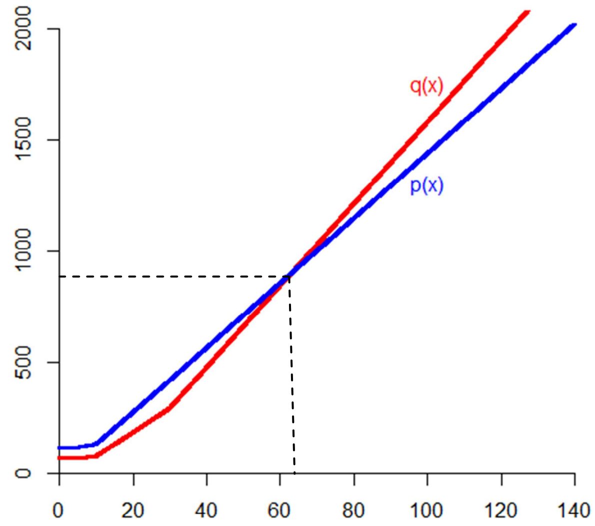
g<-function(x){
if
((x>=0)&(x<6)){
floor(0*x+34.58)
}
else if
((x>=6)&(x<11))
{
floor(1.07*(x-5)+34.58)
}
...
}
	f<-function(x){
	if
	((x>=0)&(x<6)){
	floor(0*x+62.24)
	}
	else if
	((x>=6)&(x<11))
	{
	floor(1.93*(x-5)+62.24)
	}
	...
	}
		plot.new()
		plot.window(xlim=c(0,50), ylim=c(0,500))
		axis(1,pos=0)
		axis(2,pos=0)
		sequência<-seq(0,50,1)
		for(i in 1:51){
		points(sequência[i],g(sequência[i]),pch=46,cex=3,col="red")
		}
		for(i in 1:51){
		points(sequência[i],f(sequência[i]),pch=46,cex=3, col="blue")
		}

Fonte: autores

4.3 Resultados da Etapa 3: O estudo de limite e continuidade

Para finalizar o trabalho, por meio da função $f(x)$ foi possível associar os conceitos de limites laterais e continuidade. Usando a definição, os alunos perceberam que a função era definida para todo ponto $c \in \mathbb{Z}$. Porém, era ncessário testar se o $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$. Como a função obtida é uma função de várias sentenças, porém definidas por uma função "maior inteiro", foi necessário verificar a continuidade nos pontos que passam de um intervalo de consumo para o outro.

Figura 2 – Gráfico comparativo os valores da conta de água para tarifa Residencial $p(x)$ e Comercial/Público $q(x)$, com a cobrança do serviço de coleta e tratamento de esgoto e considerando o domínio $\mathbb{R}$.



Fonte: Autores, 2019

Foi solicitado aos alunos verificarem a continuidade nos extremos dos intervalos de cada sentença. Por exemplo, em $x = 6$ para a sentença $f(x)$=$1{,}93\lfloor x-5\rfloor + 62{,}24$ e considerando as propriedades 3 e 5 do Teorema 1, os alunos testaram:

$\lim_{x\to 6^-} f(x) = 62{,}24$ e $\lim_{x\to 6^+} f(x) = 64{,}17$.

Então, o Teorema dos Limites Laterias foi aplicado e verificado que o $\lim\limits_{x\to 6} 1{,}93\lfloor x-5\rfloor + 62{,}24$ não existia e, portanto, a função não é contínua neste ponto.

Observando o gráfico da função $f(x)$ apresentada na Figura 1, os discentes perceberam que a descontinuidade é do tipo salto, e que a descontinuidade ocorre em cada $k \in \mathbb{Z}_+$. Para avaliar a tarifa Comercial/Pública, raciocínio semelhante foi aplicado.

Já ao verificarem a continuidade do caso para as funções obtidas na segunda etapa do trabalho, e tomando a sentença $f(x)$=$1{,}93(x-5) + 62{,}24$ em $x = 5$, tem-se que:

i) $f(5) = 1{,}93(5-5) + 62{,}24 = 62{,}24$

ii) $\lim_{x\to 5^-} f(x) = 62{,}24$ e $\lim_{x\to 5^+} f(x) = 62{,}24$

e pelo Teorema dos Limites Laterias, $\lim\limits_{x\to 5} 1{,}93(x-5) = 62{,}24$.

Como $\lim_{x\to 5} 1{,}93(x-5) + 62{,}24 = f(5)$, a função é contínua neste ponto. Raciocínio similar pode ser aplicado na análise da conta de água e esgoto da tarifa Comercial/Pública.

Um detalhe importante a ser destacado nessa etapa é que os alunos conseguiram facilmente assimilar e associar as definições de limite e continuidade trabalhadas na disciplina de Cálculo. Ao final das 3 etapas, os grupos formataram o trabalho e entregaram impresso ao professor, sendo este utilizado como parte da avaliação da disciplina.

5 CONCLUSÕES

Por meio do tema motivador Conta de Água, estabeleceu-se uma ponte entre teoria e prática no estudo de funções, limite e continuidade. No desenvolvimento das etapas da atividade, foi possível constatar que os alunos tiveram dificuldades em interpretar os dados das tarifas e em encontrar um modelo matemático que representasse a relação entre valor e consumo. Alguns alunos não conseguiam associar a teoria acumulada ao longo do ensino fundamental e médio com a atividade (prática). Porém, o trabalho em grupo trouxe maior confiança na hora de exporem suas dificuldades, opiniões e socializar suas ideias.

As notas na avaliação de limites foram superiores, quando comparado com turmas anteriores de mesmo semestre de entrada (2º Semestre/ano). Ademais, ao se trabalhar o conceito de derivadas, alguns alunos conseguiram mostrar matematicamente as regras de derivação por meio do conceito de limites, mostrando a maturidade adquirida a partir da aprendizagem significativa.

É possível afirmar que uma metodologia baseada na Teoria da Aprendizagem Significativa, que utiliza um material potencialmente significativo, tem condições de produzir sensíveis mudanças no processo de ensino e de aprendizagem de funções limites e continuidade, fazendo do aluno um indivíduo que participa do processo, explicita, discute e socializa as suas ideias.

REFERÊNCIAS

AGEPAR, Agência Reguladora do Paraná. **RESOLUÇÃO HOMOLOGATÓRIA Nº 005.** Disponível em: https://www.documentador.pr.gov.br/documentador . Acesso em 06 set. 2018.

AUSUBEL, D. P. **Adquisición y retención del conocimiento**: Una perspectiva cognitiva. Ed. Paidós. Barcelona, 2002.

AUSUBEL, D.P. ; NOVAK, J.D.; HANESIAN, H. **Psicologia educacional**. Rio de Janeiro, Interamericana, 1980.

BRUM, W.P.; SCHUHMACHER, E. Utilização de mapas conceituais visando o ensino de história da geometria sob a luz da aprendizagem significativa. **Aprendizagem significativa em revista**, v.2, n.3, p. 39-57, 2012.

DIOGO, M. F.; RAYMUNDO, L,S; WILHELM, F. A.; ANDRADE, S. P. C.; LORENZO, F. M.; ROST, F. T. Percepções de coordenadores de curso superior sobre evasão, reprovações e estratégias preventivas. **Avaliação**, Campinas, v. 21, n.1, p. 125-151, 2016.

FOGAÇA, L.S.; MOREIRA, M.A.; SAHELICES, C.C. Estudo sobre a aprendizagem de equações e gráficos, em um curso de administração, fundamentado nas teorias da aprendizagem significativa e dos campos conceituais. **Aprendizagem significativa em revista**, v.8, n.2, p. 1-18, 2018.

IVERSON, K. E. **A Programming Language**, John Wiley & Sons Inc, 1962.

KLEIN, M.E.Z; DEL PINO, J.C. O ensino e a aprendizagem de matrizes tendo como fundamentação teórica a teoria da aprendizagem significativa. **Aprendizagem significativa em revista**, v.7, n.3, 60-81, 2017.

LOPEZ, I. F.; SEGADAS, C. A disciplina cálculo i nos cursos de engenharia da UFRJ: sua relação com o acesso à universidade e sua importância para a conclusão do curso. **REUCP**, Petrópolis, v. 8, n. 2, p. 92-107, 2014.

MOREIRA, M.A. e MASINI, E.A.F.S. Aprendizagem significativa: a teoria de David Ausubel. São Paulo, Editora Moraes, 1982.

R DEVELOPMENT CORE TEAM. **R: a language and environment for statistical computing**, reference índex version 3.5.1. R Foundation for Statistical Computing, Viena, Áustria, ISBN, 2018.

RIMSA, L.G. A continuidade da função imposto de renda: desfazendo mitos. **Educação & Tecnologia**, v.21, n.3, p. 58-64, 2016.

STARCK, k.; CENI PINTO, T.T. Aprendizagem baseada em problemas adaptada (ABPA): experiência no curso de engenharia civil de uma faculdade privada do estado do Paraná. In: XLVI Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia e 1º Simpósio Internacional de Educação em Engenharia, 2018, Bahia. **Anais**. Salvador, 2018.

THOMAS, George B.; WEIR, Maurice D.; HASS, Joel. **Cálculo**. 12ª edição, São Paulo: Pearson, 2012.

FUNCTIONS, LIMITS AND CONTINUITY: AN APPROACH FROM MATHEMATICAL MODELING

Abstract: *This paper describes the application of meaningful learning theory in the discipline of Differential and Integral Calculus. The theory emphasizes that meaningful learning has a chance of occurring when there is a non-arbitrary and substantive interaction between new knowledge (ideas, propositions, information, concepts, symbols) and previous knowledge (subsuncers), contributing to its differentiation, elaboration and stability. The proposed practical exercise was based on the water bill fees of SANEPAR (Paraná Sanitation Company), wich is responsible for water supply and sanitary sewage collection in Paraná State. The activity was proposed with the purpose of contextualizing the application of the contents functions, limit and continuity. In order to do that, was necessary the study of concepts like piecewise function, floor function, discretization of the function domain, one-sided limits and continuity. Through the modeling it was possible to apply the concepts covered in the Differential and Integral Calculus course on a daily situation of students. We observed that at the end of the activity the students were able to interact with colleagues and with the professor, identify previous knowledge, understand the concepts approached more quickly and visualize other practical applications.*

Key-words: *Floor function. Piecewise function. One-sided limits.*