



TEORIA DE GRAFOS COMO FERRAMENTA INTERPRETATIVA DE CONFIGURAÇÕES COMPLEXAS DE CIRCUITOS ELÉTRICOS

GRAPH THEORY AS AN INTERPRETATIVE TOOL FOR COMPLEX ELECTRICAL CIRCUIT CONFIGURATIONS

Marcos Roberto de Araújo¹

DOI: 10.37702/REE2236-0158.v44px92-103.2025

RESUMO: Este artigo propõe uma abordagem que utiliza a teoria de grafos como ferramenta interpretativa de configurações complexas ou não convencionais de circuitos elétricos, com o objetivo de aplicação em disciplinas introdutórias de eletricidade. O método proposto foi detalhado por meio de uma atividade de verificação de aprendizagem elaborada a partir da experiência docente em cursos de graduação em engenharia. Tal atividade consistiu no cálculo da resistência equivalente de um mesmo circuito elétrico de topologia complexa em duas oportunidades: a primeira, de forma livre; a segunda, exigindo necessariamente o esboço de um grafo correspondente. Assim, mostrou-se que uma compreensão mais assertiva acerca de configurações não convencionais pode ser viabilizada pelo método sugerido.

PALAVRAS-CHAVE: abordagem; circuitos; grafos; topologia.

ABSTRACT: This article proposes an approach that uses graph theory as an interpretative tool for complex or unconventional electrical circuit configurations, for application in introductory electricity courses. The proposed method was detailed through a learning verification activity developed based on teaching experience in undergraduate engineering courses. This activity included calculating the equivalent resistance of the same electrical circuit with a complex topology on two occasions, the first in a free-form manner and the second necessarily sketching a corresponding graph. Thus, it was shown that a more assertive understanding of unconventional configurations can be made possible by the suggested method.

KEYWORDS: approach; circuits; graphs; topology.

INTRODUÇÃO

Disciplinas de circuitos elétricos são componentes curriculares fundamentais de diversos cursos de engenharia e tecnologia, como Engenharia Elétrica, Engenharia de Computação e Tecnologia em Mecatrônica Industrial, a título de exemplo. Em disciplinas introdutórias, a interpretação de topologias complexas, ou vistas a partir de pontos arbitrários do circuito em análise para cálculos de equivalentes, configura um obstáculo recorrente.

¹ Pesquisador de Pós-Doutorado da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS), Doutor em Engenharia Elétrica pela Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG), marcosraraujo9@gmail.com



Ao encontro dessa dificuldade, tem-se a aplicação da teoria de grafos a sistemas elétricos, que está consolidada na literatura, como descrito por Stagg e El-Abiad (1968) e Pereira (2015), sendo apresentada uma visão geral da relação entre a teoria de grafos e a análise de circuitos elétricos, inclusive por Dörfler, Simpson-Porco e Bullo (2018). Recentemente, abordagens distintas relacionadas ao tema foram propostas por Choi e Kim (2020), Vrbik (2022) e Kumar *et al.* (2022). No Brasil, para citar caso análogo, Abath (2014), Siqueira Junior (2019) e Lima, Simoni e Oliveira (2022) desenvolveram diferentes perspectivas envolvendo a teoria de grafos. Contudo, trata-se de um tópico avançado, o qual envolve cálculos matriciais complexos, não sendo, geralmente, relacionado em livros didáticos introdutórios adotados como bibliografia básica de disciplinas de circuitos elétricos, tal como em Nilsson e Riedel (2012), Alexander e Sadiku (2011) e Boylestad (2014).

Na literatura, a aplicação da teoria de grafos a um circuito elétrico específico se estende até a solução das tensões e correntes para cada elemento de tal circuito, tendo como passo inicial a sua representação como um grafo, associando nós e elementos a vértices e às arestas, de modo respectivo. Considerando que a ilustração de um grafo é mais simples e direta do que a de um circuito elétrico não convencional – e, portanto, mais inteligível –, a aplicação parcial da teoria de grafos poderia satisfazer a busca por uma ferramenta que pudesse sobrepor o obstáculo de aprendizagem identificado em turmas introdutórias.

Desse modo, com o propósito de adequar tal tópico avançado ao estágio de interesse do processo de aprendizagem, este trabalho propõe uma abordagem em que a teoria de grafos é aplicada parcialmente para a resolução de um circuito elétrico complexo, apenas como uma ferramenta interpretativa de como os seus elementos estão interconectados, sendo as grandezas de interesse determinadas por meio de métodos convencionais.

METODOLOGIA

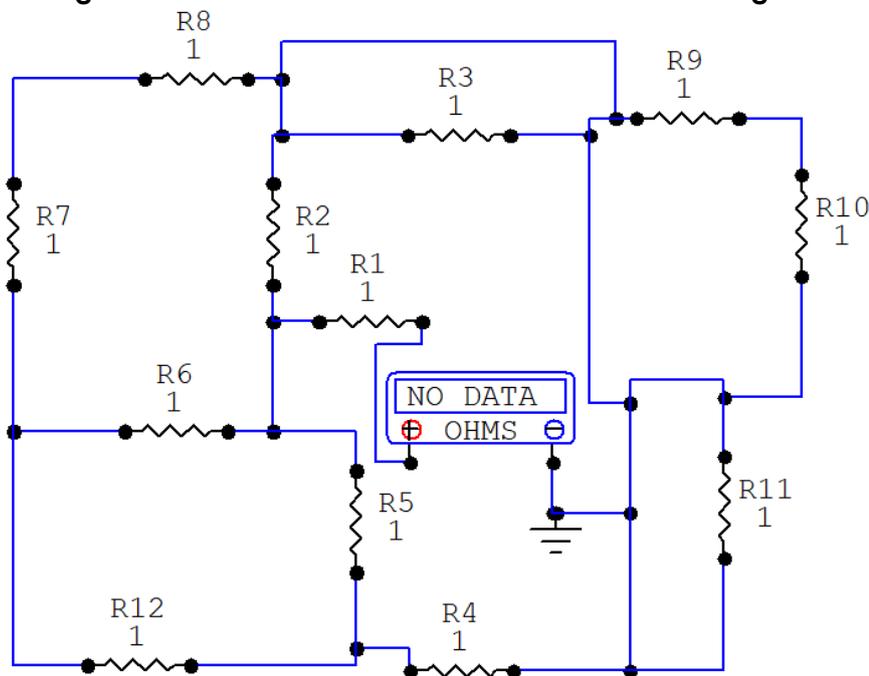
Nesta seção, a abordagem sugerida é detalhada como parte integrante de uma atividade de estudo dirigido (ED), desenvolvida para a verificação prática de sua eficácia em turmas introdutórias de circuitos elétricos. Parte-se da premissa de que os conteúdos programáticos “elementos de circuitos lineares” e “circuitos resistivos (equivalentes série e paralelo, estrela e triângulo, divisores de tensão e de corrente)” já tenham sido ministrados. O ED consiste em duas partes independentes, entre as quais é realizada uma explanação do método proposto

usando um circuito elétrico de configuração simplificada. Assim, na primeira parte, é aplicado um exercício de cálculo de resistência equivalente que pode ser resolvido de forma livre, por meio de qualquer um dos métodos lecionados na disciplina até então. Após recolhidas as entregas de tal etapa, detalha-se a abordagem proposta para empregar a teoria de grafos como ferramenta interpretativa da configuração de um circuito elétrico exemplo. Por fim, é aplicado novamente o mesmo exercício de cálculo de resistência equivalente, que deve, então, ser necessariamente associado a um grafo correspondente.

Problema estabelecido

A primeira parte do ED possui o seguinte enunciado: “Determine a resistência equivalente entre os terminais do ohmímetro no circuito abaixo”. Tal circuito elétrico é apresentado na Figura 1, em que todos os 12 resistores têm o mesmo valor de resistência elétrica, 1Ω , sendo identificados pela letra R seguida de um número sequencial.

Figura 1 – Circuito elétrico da atividade de estudo dirigido



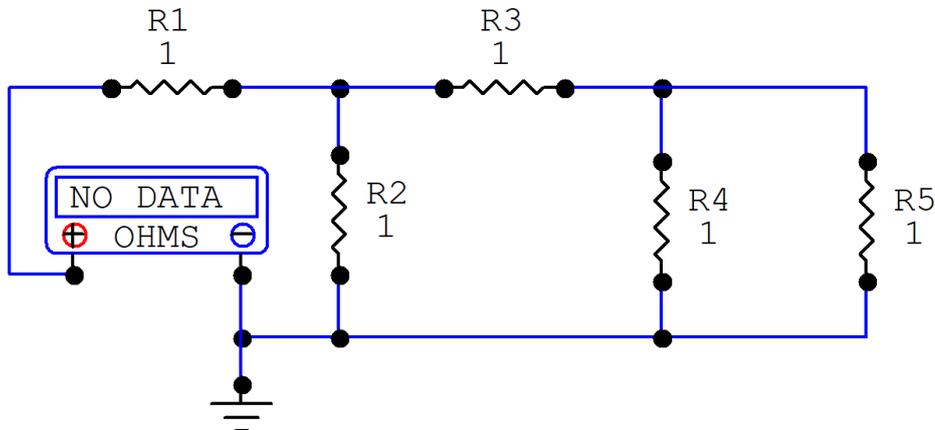
Fonte: acervo do autor (2024).

Já na segunda parte, considerando o mesmo circuito elétrico, foi dado o enunciado: “Utilizando a técnica de redesenhar o circuito como um grafo, determine a resistência equivalente entre os terminais do ohmímetro no circuito abaixo”.

Abordagem proposta

Para a explanação do método proposto, foi adotado como exemplo o circuito elétrico em cascata, ilustrado na Figura 2, o qual possui uma configuração mais simples do que a do circuito da Figura 1, viabilizando, assim, um foco maior na nova abordagem demonstrada.

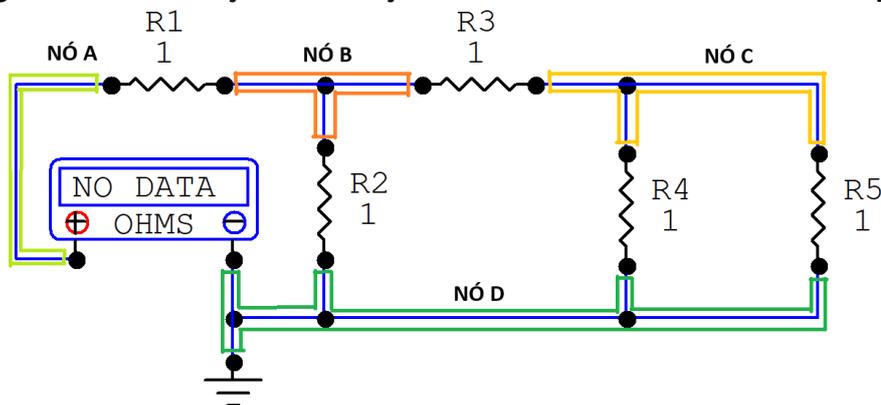
Figura 2 – Circuito elétrico exemplo para a explanação da abordagem proposta



Fonte: acervo do autor (2024).

O primeiro passo da abordagem proposta é identificar e rotular todos os nós e elementos do circuito elétrico a ser analisado. A Figura 3 exibe o mesmo circuito da Figura 2, tendo todos os seus quatro nós sido identificados (por meio de linhas circundantes de cores aleatórias) e rotulados (A, B, C e D). Ressalta-se que, na Figura 2, todos os cinco elementos do circuito já estavam previamente rotulados, seguindo o mesmo padrão da Figura 1.

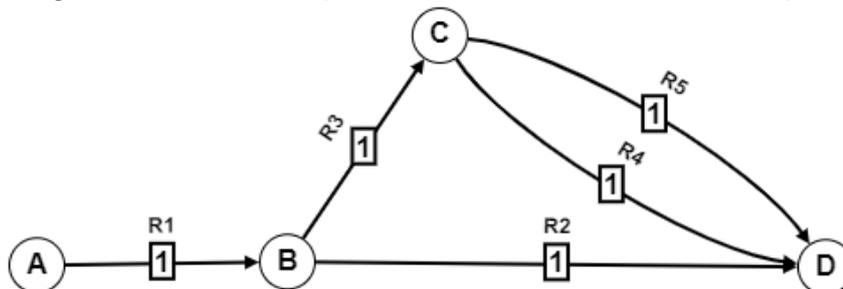
Figura 3 – Identificação e rotulação dos nós do circuito elétrico exemplo



Fonte: acervo do autor (2024).

O segundo passo consiste em esboçar um grafo correspondente ao circuito elétrico em análise, associando os nós e os elementos identificados e rotulados no primeiro passo aos vértices e às arestas de tal grafo, de modo respectivo. Como o problema apresentado trata da determinação da resistência equivalente entre os terminais do ohmímetro, que foram rotulados arbitrariamente na Figura 3 como A e D, sua solução é dada pelo cálculo de $R_{eq} = R_{AD}$. Portanto, seria propício realizar um esboço do grafo tendo como pontos de partida e chegada esses mesmos nós. A Figura 4 expõe tal esboço, omitindo convenientemente o ohmímetro, o qual foi realizado dispondo primeiramente todos os vértices e depois interligando-os através das arestas, tendo como referência os nós de partida e chegada de cada elemento. Por exemplo, na Figura 3, o elemento R_3 está conectado entre os nós B e C; logo, ele deve ser representado no grafo por uma aresta entre os vértices B e C. Como se trata de um cálculo de resistência equivalente, a orientação de tal grafo foi arbitrada com o intuito somente de enfatizar a identificação e disposição dos nós dos terminais do ohmímetro, facilitando assim a visualização de como os elementos estão interconectados.

Figura 4 – Grafo correspondente ao circuito elétrico exemplo



Fonte: acervo do autor (2024).

Já o terceiro passo consiste em redesenhar o grafo de modo mais conveniente para a sua interpretação, caso o primeiro esboço ainda não seja suficiente para identificar todas as conexões em série, paralelo, estrela ou triângulo entre os elementos. Para o circuito elétrico exemplo, particularmente, o grafo da Figura 4 é dado como suficiente para a compreensão das associações dos seus cinco elementos.

O quarto e último passo da abordagem proposta é determinar o método ou teorema da literatura mais apropriado para resolver o circuito elétrico analisado, tendo o grafo como referência durante a resolução, o que possibilita inclusive simplificá-lo sucessivamente até um nível desejado e suficiente. Na Figura 4, é possível verificar que:



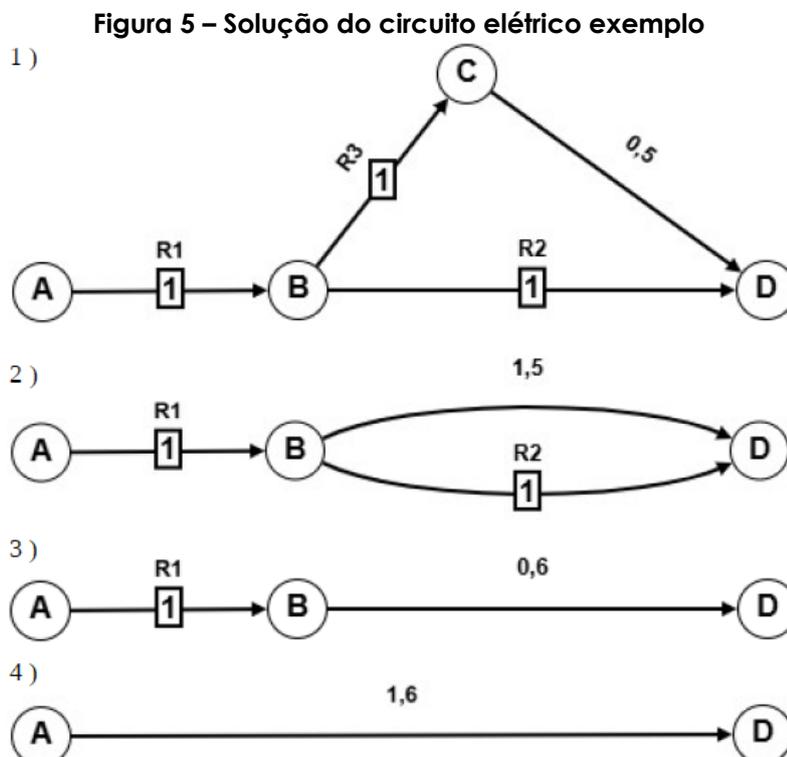
i) os elementos R4 e R5 estão ligados em paralelo, já que os seus terminais, de entrada e saída, são comuns. Assim, uma resistência equivalente em paralelo pode ser calculada, por exemplo, dividindo o valor de resistência de 1Ω , que é igual para ambos os resistores, por dois, que é o número de elementos em paralelo, o que resulta em: $R4 \parallel R5 = 0,5 \Omega$;

ii) o elemento R3 está em série com a associação em paralelo de R4 e R5, tendo em conta que R3 e “ $R4 \parallel R5$ ” possuem apenas um terminal comum, o nó C, e que nesse nó não há outras ligações. Dessa forma, uma resistência equivalente pode ser obtida pela soma de suas resistências, ou seja: $R3 + 0,5 = 1,5 \Omega$;

iii) o elemento R2 está em paralelo com a associação série-paralelo “ $R3 + (R4 \parallel R5)$ ”, de modo que uma resistência equivalente pode ser calculada, por exemplo, por meio da razão do produto pela soma das suas resistências, resultando em: $R2 \parallel 1,5 = 0,6 \Omega$;

iv) por fim, R1 está em série com a associação série-paralelo “ $R2 \parallel [R3 + (R4 \parallel R5)]$ ”, sendo a solução do problema exemplo dada pela soma de suas resistências, isto é: $R1 + 0,6 = 1,6 \Omega$.

O passo a passo supracitado é ilustrado de modo respectivo na Figura 5.



Fonte: acervo do autor (2024).

Solução do Estudo Dirigido

O método proposto, descrito na subseção anterior, pode ser resumido nas seguintes etapas:

Etapa 1 – Identificar e rotular os nós e os elementos do circuito elétrico em análise.

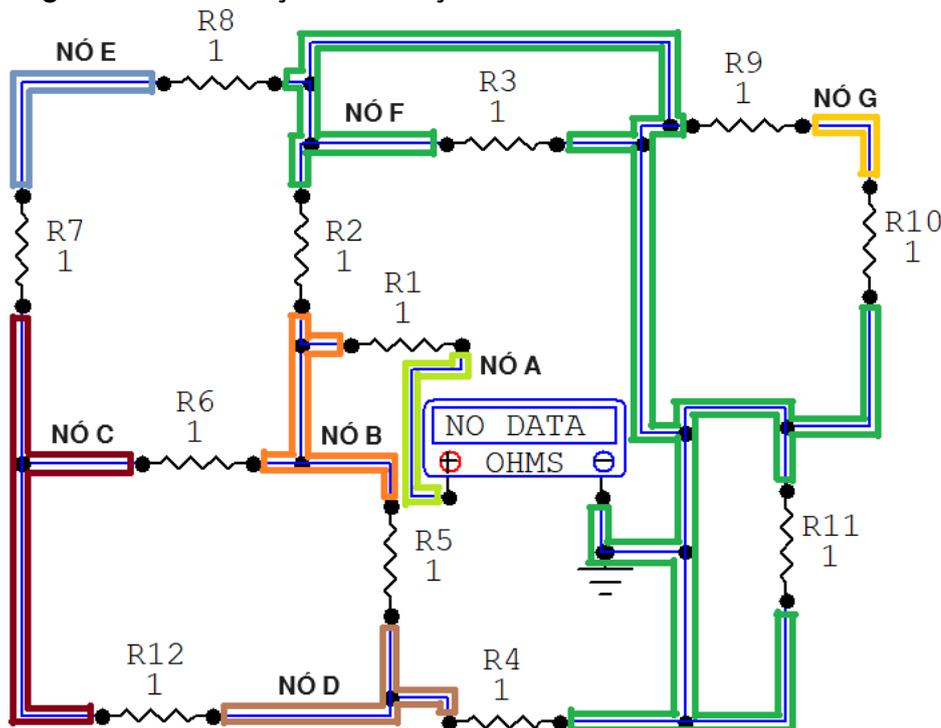
Etapa 2 – Esboçar um grafo associando os nós e os elementos rotulados a vértices e às arestas, respectivamente.

Etapa 3 – Redesenhar o grafo convenientemente.

Etapa 4 – Resolver o circuito elétrico tendo o grafo como referência.

A Figura 6 mostra o circuito elétrico da Figura 1 após a identificação e rotulação de seus sete nós (A, B, C, D, E, F e G), tendo sido seguido o mesmo padrão arbitrado na Subseção 2.2. Outra vez, os 12 elementos de tal circuito já estavam previamente rotulados.

Figura 6 – Identificação e rotulação dos nós do circuito elétrico do ED

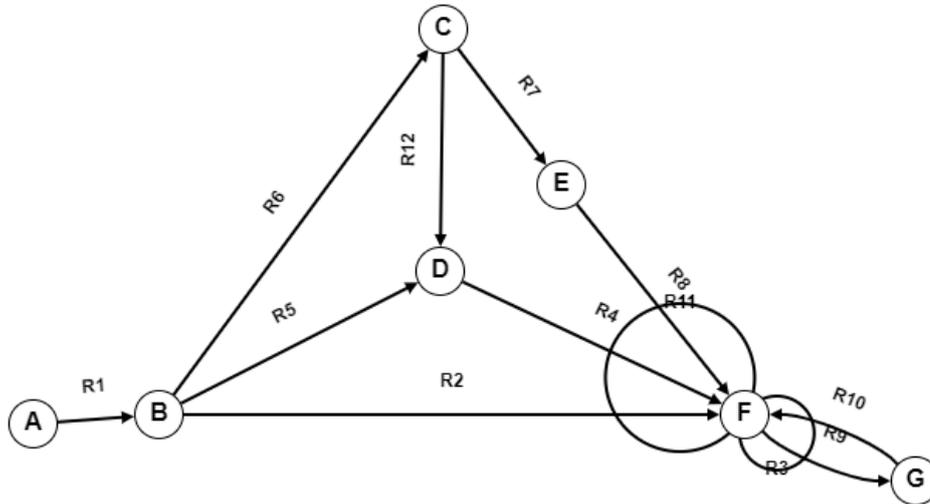


Fonte: acervo do autor (2024).

Na Figura 7 é ilustrado um esboço para o grafo correspondente ao circuito da Figura 6, sendo os valores de resistência elétrica omitidos a fim de viabilizar uma melhor visualização e compreensão da interligação dos elementos. Os terminais

do ohmímetro, rotulados como os nós A e F, foram adotados respectivamente como os vértices de partida e chegada, de modo análogo à Figura 4.

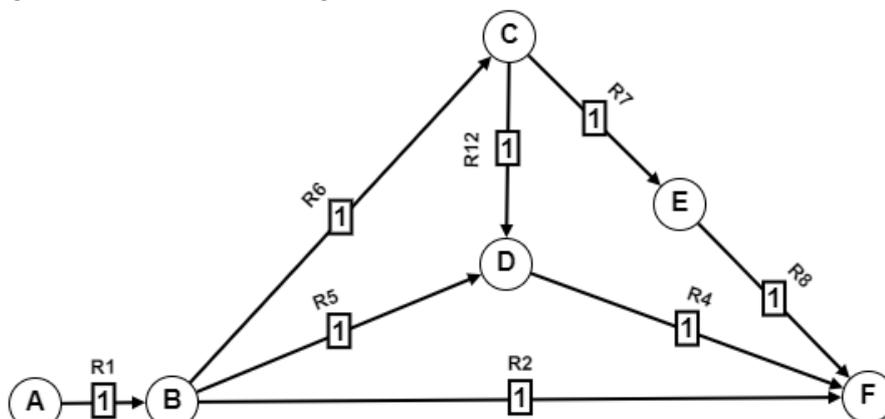
Figura 7 – Grafo correspondente ao circuito elétrico do ED



Fonte: acervo do autor (2024).

Examinando a Figura 7, pode-se constatar que os elementos R3 e R11 partem e chegam a um mesmo nó (F), o que caracteriza uma ligação desses resistores em paralelo com um curto-circuito, de resistência nula. Como a resistência equivalente da associação em paralelo de qualquer resistor com um curto-circuito franco é também nula, tais elementos podem ser desconsiderados na análise, pois não influenciam no resultado final. O mesmo ocorre para a associação em série dos elementos R9 e R10, a qual também parte e chega ao nó F. Isto posto, a Figura 8 exibe um redesenho do grafo da Figura 7, no qual os elementos R3, R9, R10 e R11 foram suprimidos, sendo agora expostos os valores das demais resistências.

Figura 8 – Redesenho do grafo suprimindo elementos curto-circuitados

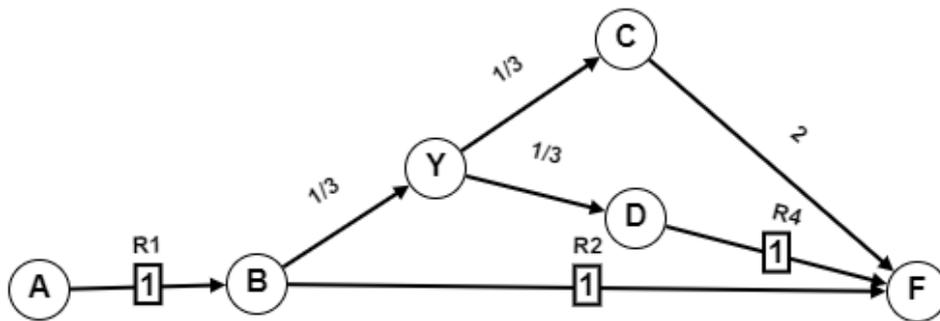


Fonte: acervo do autor (2024).

Ao analisar a Figura 8, entre as diversas perspectivas possíveis, pode-se identificar uma associação em triângulo entre os elementos R5, R6 e R12. Assim procedendo, um circuito estrela equivalente pode ser obtido por meio de uma transformação Δ -Y, sendo a resistência de cada um dos três resistores do circuito estrela equivalente igual a um terço da resistência de 1Ω , que é igual para R5, R6 e R12.

Ademais, R7 e R8 estão em série, podendo ser simplificados por uma resistência equivalente igual à soma de seus valores. A Figura 9 expõe uma simplificação do grafo da Figura 8 após as operações supracitadas, sendo incorporado um novo vértice (Y), correspondente ao centro-estrela do circuito equivalente obtido. Destacam-se também os valores resultantes das resistências equivalentes calculadas.

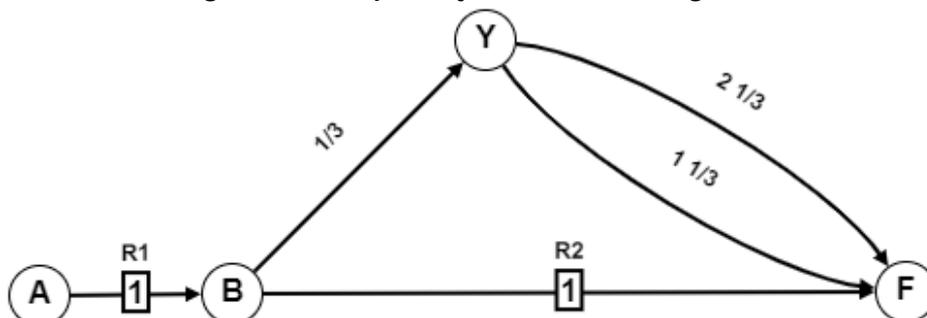
Figura 9 – Simplificação do grafo



Fonte: acervo do autor (2024).

Já a Figura 10 mostra uma simplificação para o grafo da Figura 9, em que os pares de arestas $\{(Y,C), (C,F)\}$ e $\{(Y,D), (D,F)\}$ são substituídos pelas suas respectivas resistências equivalentes em série, dadas pela soma de cada par de resistências.

Figura 10 – Simplificação sucessiva do grafo



Fonte: acervo do autor (2024).



Comparando a Figura 10, que corresponde ao circuito elétrico do ED, com a Figura 4, correspondente ao circuito elétrico exemplo, constata-se uma similaridade de configuração, a qual se deu exclusivamente pelo caminho específico adotado para a associação dos elementos e simplificação do circuito. Assim, sua solução pode ser dada analogamente por:

i) cálculo da resistência da associação em paralelo dos dois elementos ligados entre os nós Y e F, que resulta em: $2,333... \parallel 1,333... = 0,8484... \Omega$;

ii) cálculo da resistência da associação em série entre a aresta (B,Y) e a equivalente de (Y,F), ou seja: $0,333... + 0,8484... = 1,1818... \Omega$;

iii) cálculo da resistência da associação em paralelo entre a aresta equivalente de {(B,Y), (Y,F)} e R2, resultando em: $1,1818... \parallel 1 = 0,541666... \Omega$;

iv) cálculo da resistência equivalente entre os terminais do ohmímetro, obtida pela associação em série entre R1 e a aresta equivalente de (B,F), isto é: $1 + 0,541666... = 1,541666... \Omega$.

DISCUSSÃO

Para a aplicação do ED, são adotadas medidas como comunicação antecedente, detalhamento da estrutura, disponibilização de fórmulas, além da atribuição da pontuação ordinária à sua realização e de pontuação extra a acertos do resultado final.

A partir da experiência docente em cursos de graduação em engenharia, a abordagem proposta tem se mostrado de mais fácil assimilação do que a metodologia convencional para topologias complexas ou não convencionais, proporcionando tanto acertos finais quanto uma melhor compreensão da configuração inicial.

Logo, a adoção da abordagem de se esboçar um grafo associado ao circuito elétrico em análise em disciplinas introdutórias de eletricidade pode ser eficaz como facilitadora também para a aplicação de teoremas, como Thévenin, Norton e superposição, viabilizando uma maior assertividade na identificação e interpretação de associações de elementos em série, paralelo, estrela e triângulo, assim como de curtos-circuitos.



CONCLUSÕES

Este trabalho propôs um método em que a teoria de grafos é utilizada como ferramenta interpretativa de configurações complexas de circuitos elétricos. Tal iniciativa vai ao encontro do atendimento a um obstáculo recorrente em disciplinas introdutórias de eletricidade. A aplicação da teoria de grafos a circuitos elétricos está consolidada na literatura, contudo ela se estende até a solução do circuito em análise, envolvendo cálculos matriciais complexos. Dessa forma, a abordagem que a emprega parcialmente em um curso básico – apenas como uma ferramenta interpretativa de como os elementos estão interconectados – tem se mostrado eficaz para a compreensão e simplificação de topologias não convencionais, como na aplicação de teoremas.

REFERÊNCIAS

- ABATH, L. L. **Circuit theory via algebraic topology**. 2014. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2014.
- ALEXANDER, C. K.; SADIKU, M. N. O. **Fundamentos de circuitos elétricos**. Porto Alegre: Amgh Ed., 2011.
- BOYLESTAD, R. L. **Introdução à análise de circuitos**. São Paulo: Pearson, 2014.
- CHOI, J.; KIM, J. Kirchhoff's circuit law applications to graph simplification in search problems. **Proceedings...** INTERNATIONAL CONFERENCE ON INFORMATION AND COMMUNICATION TECHNOLOGY CONVERGENCE. 11., 2020, Jeju, Korea (South). Disponível em: <https://doi.org/10.1109/ICTC49870.2020.9289222>. Acesso em: 7 nov. 2024.
- DÖRFLER, F.; SIMPSON-PORCO, J. W.; BULLO, F. Electrical networks and algebraic graph theory: models, properties, and applications. **Proceedings...** IEEE, v. 106, n. 5, p. 977-1005, 2018. Disponível em: <https://doi.org/10.1109/JPROC.2018.2821924>. Acesso em: 7 nov. 2024.
- NILSSON, J. W.; RIEDEL, S. A. **Circuitos Elétricos**. Rio de Janeiro: Pearson, 2012.
- KUMAR P. et al. Duality of graph and its application in electric circuit. **Proceedings...** INTERNATIONAL CONFERENCE ON SYSTEM MODELING AND ADVANCEMENT IN RESEARCH TRENDS. 11., 2022, Moradabad, India. p. 1561-1563. Disponível em: <https://doi.org/10.1109/SMART55829.2022.10047073>. Acesso em: 7 nov. 2024.
- LIMA, W. C.; SIMONI, V. R.; OLIVEIRA, A. C. C. Metodologias para obtenção de equivalentes de rede via teoria de grafos para aplicação em ANAREDE. **Anais...** CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA. Fortaleza: 2022, p. 1-8. Disponível em: https://www.sba.org.br/cba2022/wp-content/uploads/artigos_cba2022/paper_2716.pdf. Acesso em: 7 nov. 2024.
- PEREIRA, C. **Redes elétricas no domínio da frequência**: técnicas de análise, modelos de componentes, técnicas computacionais. São Paulo: Artliber, 2015.



SIQUEIRA JUNIOR, F. A. N. **Uma abordagem da teoria de grafos no ensino médio**. 2019. Monografia (Especialização em Educação Matemática) – Colégio Pedro II, Rio de Janeiro, 2019.

STAGG, G.; EL-ABIAD, A. **Computer Methods in Power System Analysis**. Tokyo: McGrawHill, 1968.

VRBIK, J. Solving electrical circuits via graph theory. **Applied Mathematics**, v. 13, p. 77-86, 2022.