ESTUDO DO LIMITE DE UMA FUNÇÃO: ANÁLISE COM UM OBJETO DE APRENDIZAGEM PARA CURSOS DE ENGENHARIA E MATEMÁTICA

LIMIT STUDY OF A FUNCTION IN PERSPECTIVE FIGURAL AND CONCEPT – ANALYSIS WITH A LEARNING OBJECT

Daniela A. da S. Moura,[1] João B. Laudares[2]

DOI: 10.5935/2236-0158.20170012

RESUMO

Este artigo apresenta resultados de pesquisa de um Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática, cujo objeto se constituiu pelo estudo conceitual de Limite de uma função de uma variável. Parte-se do princípio da importância do Limite como um conceito básico do Cálculo Diferencial e Integral (CDI), conteúdo obrigatório em cursos de Engenharia e Matemática, entre outros cursos das Ciências Exatas. Como referencial teórico, foram utilizados estudos e pesquisas de autores como Tall (2013), Vinner (2013), Duval (2009), Laudares (2013), Lachini (2001), que trabalham a aprendizagem numa perspectiva cognitiva da necessidade de buscar o entendimento desse conceito pelo estudante, antes de formalizar uma definição. Isso é privilegiar na estrutura da Matemática não só os procedimentos de cálculo. O instrumento metodológico utilizado foi o Objeto de Aprendizagem, construído com o *software* Geogebra, próprio para mediação da informática no processo didático. Assim, foram exploradas as representações algébricas e, especialmente, a geométrica-gráfica com recursos da Informática Educativa. Do conjunto das atividades desenvolvidas, neste artigo, opta-se por apresentar uma fundamental para o processo da compreensão, coerente com o objeto de pesquisa. Os sujeitos da investigação foram estudantes de matemática, mas tem sido aplicado em cursos de engenharia. A análise dos dados foi feita utilizando-se de categorias da investigação qualitativa.

Palavras-chave: Ensino de cálculo; conceito e definição; conceito de limite.

ABSTRACT

This article presents results of a survey of a Professional Masters in Science and Mathematics Teaching, the object of which was constituted by the conceptual study Limit of a function of one variable. It starts from the principle of the importance of the limit as a basic concept of Differential and Integral Calculus, mandatory content in Engineering and Mathematics courses, among other courses of exact sciences. As a theoretical framework were used studies and research of authors such as Tall (2013), Vinner (2013), Duval (2009), Laudares (2013), Lachini (2001) working on learning a cognitive perspective the need to seek student understanding this concept before formalizing a definition. This is the focus of mathematics structure not only the calculation procedures. The methodological tool used was the learning object built with software Geogebra, suitable for mediation of information technology for teaching process. Thus, the algebraic representations were explored and especially the geometric-graphic with resources of Educational Informatics. Of all the activities in this article is chosen to present one (1) essential to the process of understanding, consistent with the object of research. The research subjects were math students, but has been applied in engineering courses. Data analysis was performed using categories of qualitative research.

Keywords: Calculus teaching; and concept definition; limit concept.

1 Professora, mestre, Faculdade de Pará de Minas; danisilmoura@yahoo.com.br

2 Professor, doutor, PUC-MINAS; jblaudares@terra.com.br

ENSINO DE CÁLCULO: DESAFIOS, PERSPECTIVAS E ASPECTOS CONCEITUAIS

De maneira inevitável, ao refletirmos sobre a questão do relacionamento entre o ensino e a aprendizagem dos conceitos matemáticos, sobretudo o Cálculo Diferencial e Integral, sociedade e instituições de ensino se deparam com questões conflitantes, como o alto índice de reprovação e evasão de seus alunos. Barufi (1999) evidencia em suas pesquisas (tese de doutorado) dados preocupantes sobre esse fenômeno: o índice de reprovação em cursos de Cálculo, por exemplo, da Escola Politécnica da USP, no período de 1990 a 1995, transita entre 20% a 75%, no entanto, entre os alunos do Instituto de Matemática e Estatística, a margem é superior a 45%, provocando um índice de aprovação inferior a 55% em uma turma de Cálculo. Barufi (1999) também relata como fator predominante que sustenta esses índices as dificuldades dos alunos frente a conteúdos matemáticos básicos, apontadas como uma das principais causas para a ocorrência de reprovações e desistências. Comungam com esses fatos acerca do fracasso no ensino de cálculo, Meyer e Souza Júnior (2002, p. 121), que revelam que:

> no Brasil, o ensino do Cálculo tem sido responsabilizado por grande número de reprovações e de evasões de estudantes universitários. É comum em nossas universidades a reclamação, por parte dos alunos ou por parte dos professores de outras áreas, da inexistência de esforços para tornar o Cálculo interessante ou útil.

Tal problema não é cultural, não se justifica por questões socioeconômicas brasileiras, é um evento mundial. Crescentes estudos comprovam, sobretudo nos países mais desenvolvidos, como nas publicações de David Tall (1976), o qual se destaca pelos trabalhos na área de pesquisa do "pensamento matemático avançado", cujas articulações permeiam o ensino e a aprendizagem de Cálculo, como também as dificuldades apresentadas pelos alunos nos conceitos básicos dessa disciplina. Outro fator preponderante foi o movimento da Reforma do Ensino de Cálculo, "Calculus Reform", ocorrida na década de 1980, cujos pilares são o uso de tecnologia, *softwares* e calculadoras gráficas, como apoio metodológico na construção de conceitos, teoremas e resolução de problemas, com ênfase na aplicabilidade, idealizando o ensino intermédio a "Regra dos Três", que propõe o desenvolvimento das atividades e problemas, recorrendo a três sistemas distintos de representação de um mesmo objeto: aritmético, algébrico e geométrico.

Nas universidades brasileiras, são perceptíveis os reflexos desse movimento, construção de laboratórios informatizados, introdução de *softwares* matemáticos no ensino de Cálculo e ascendentes pesquisas publicadas em congressos e encontros de educação matemática e em engenharia, que apresentam e comunicam esses novos métodos de conceber o ensino.

O ensino e a aprendizagem de Cálculo anseiam atingir dois objetivos, a saber:

> [...] o primeiro destes objetivos almeja que o estudante tenha contato com a matemática como técnica de conhecer, de pensar e de organizar; é preciso que o estudante pense sobre o significado geométrico e numérico do que está fazendo, saiba avaliar e analisar dados, explique o significado de suas respostas. O segundo está orientado para que o aluno adquira compreensão e capacidade de aplicação prática dos conceitos e definições, estando atento para que o cálculo não se torne um mero receituário. (LACHINI, 2001, p. 147)

Nessa perspectiva, faz-se necessário recorrer a uma análise mais reflexiva das relações dialéticas entre o pensamento (ideias matemáticas) e a linguagem matemática (sistemas). Na verdade, justifica-se desvelar o desenvolvimento semiótico para esclarecer sobre os procedimentos de interpretação de sistemas de signos matemáticos presentes nos processos didáticos, por exemplo, em um trabalho matemático, os símbolos (signos) transmitem atributos conceituais (significados). Vale ressaltar quão importante é a compreensão da natureza dos conceitos matemáticos, proposições e sua relação com contextos e situações-problema, notadamente à luz das construções teóricas de Duval (2009) a respeito das representações semióticas (figuras, esquemas, gráficos, expressões simbólicas, expressões linguísticas, etc.).

Duval (2009), apresenta dois elementos atuantes no processo da atividade mental no fazer matemático: "semiosis" e "noesis". Semiosis é a apreensão ou produção de uma representação semiótica, e a noesis a apreensão conceitual de um objeto. O autor defende que a compreensão do papel da semiosis no funcionamento do pensamento e na forma como se desenvolve o conhecimento está relacionada com a diversidade de signos que podem ser utilizados.

Tais atividades, às quais se pode chamar de coordenação de registros semióticos, consiste em utilizar espontaneamente e rapidamente diferentes registros semióticos para representar um objeto. Essa coordenação pode ser indispensável para a aprendizagem matemática eficaz, porque só a manipulação de várias representações permite ao aprendiz distinguir um objeto a partir de suas representações, que é uma propriedade essencial do conceito matemático (ROSA, 2005). Assim, o ponto relevante no desenvolvimento matemático não é apenas dominar a construção da linguagem simbólica matemática, mas, sobretudo, produzir significado. Alguns fatores são essenciais nesse processo de desenvolvimento conceitual e apropriação de uma entidade matemática: diversidade de objetos envolvidos na atividade matemática, diversidade nas ações e processos de semiose envolvidos em diferentes tipos de objetos, formas de produzir sinais e a diversidade de contextos.

Refletindo sobre o relacionamento entre o ensino e a aprendizagem dos conceitos de cálculo de Limite, pretende-se delinear um ensino e uma aprendizagem no campo conceitual, migrando para a definição, alicerçado numa metodologia que promova a construção do conhecimento, como o uso da tecnologia, bem como verificar as contribuições desses instrumentos.

DIVERSAS INTERPRETAÇÕES DO ENSINO DE CÁLCULO

Badaró e Lima (2011) explanam em seu artigo acerca de uma pesquisa realizada por Tall, intitulada *Advanced Mathematical Thinking*, em 1991, na qual os autores descrevem o que seria o quadro teórico versando sobre os Três Mundos da Matemática, conforme o esquema apresentado na Figura1.

Figura 1 – Quadro teórico dos Três Mundos da Matemática segundo David Tall, 2004.

Fonte: Criado pelos autores.

Os Três Mundos da Matemática têm sido foco de estudo de David Tall e de Anna Watson, em um trabalho publicado no ano de 2002, *Embodied action, effect, and symbol in mathematical growth* (Coporificar ação, efeito, e símbolo no crescimento matemático). Para exemplificar esse estudo, Tall (2002) menciona o ensaio "Patterns of growth" (Padrões de crescimento), publicado por Bruner (1966). Nesse estudo, são apresentados três modos de representação mental, a saber: 1) o *sensório-motor*, chamado por Bruner de *encenado*, e que se constitui através da ação; 2) o *icônico*, que depende do visual e de uma organização sensorial do uso de imagens e síntese; 3) e o *simbólico*, que é a representação do pensamento pelo uso de palavras (linguagem em sua forma natural). A compreensão dessas representações é de suma importância, pois permite conceber a forma como acontece o desenvolvimento cognitivo do indivíduo. Essa sequência foi utilizada por Bruner (1966) para analisar a Reforma do Cálculo, a Regra de Três e a passagem para a Regra de Quatro, na qual está inclusa a categoria "verbal".

A figura seguinte mostra uma comparação dos Três Mundos de representação de Tall, fazendo uma comparação com os modos de Bruner, mostrando, por fim, a Regra de Quatro.

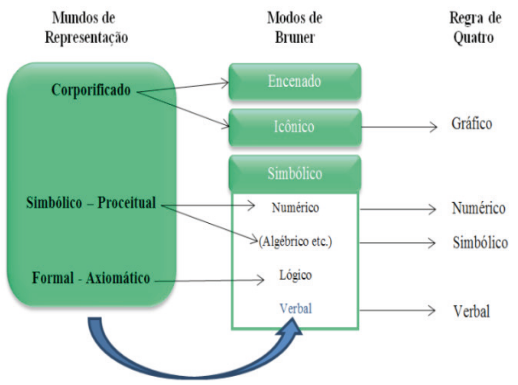


Figura 2 – Três Mundos de representação e suas ligações com outros pontos de vista.

Fonte: Tall, 2002, p. 4 *apud* Fonseca, 2012, p. 61.

Pode-se observar, na Figura 2, que a linguagem opera nos Três Mundos de Tall, diferentemente dos outros modos, nos quais a linguagem está explicitada como uma categoria ou uma subcategoria. Para Bruner, a linguagem é compreendida como a divisão somente do simbolismo, e na Regra de Quatro é vista como uma categoria à parte.

Dentro do desenvolvimento das concepções de linguagem, o quadro teórico sobre os Três Mundos da Matemática apresenta o desenvolvimento da matemática como uma atividade humana que perpassa por três pilares do pensamento matemático: "*conceitual/corporificado*", relacionado à reflexão e ao pensamento experimental, que pode ser compreendido como a base do pensamento matemático e está embasado na percepção do mundo e na operação; o segundo mundo de Tall: "*simbólico/proceptual*" (processo e conceito-proceito), por exemplo, os números. Esse mundo se inicia com ações que usam símbolos que permitem alternar os processos de fazer matemática para conceitos de pensar sobre, e, por fim, o *formal/axiomático*, ou mundo formal, relativo às definições e provas, este se caracteriza pela utilização de definições formais para os conceitos, a partir das quais se desenvolvem as deduções, sendo que e elas pressupõem a realização da construção de um sistema axiomático, como uma análise ou uma teoria em grupo (FONSECA, 2012). Esse fenômeno cognitivo de construção e desenvolvimento matemático converge com as teorias das representações semióticas de Duval, nas quais os objetos devem transitar, ser representados de formas distintas e ser consolidados. Retrata também o desenvolvimento intelectual nesta relação: indivíduos, objetos e o fazer matemático.

O objetivo deste trabalho é proporcionar uma lente conceitual para abordar e discutir a complexidade do tema Limite, alicerçado nos pilares do CDI, e almejando projetar expectativas para uma melhor compreensão acerca do Limite, em um aspecto figural, diversidade de representações conceituais, apropriação e consolidação de um objeto matemático. Este trabalho destina-se a contribuir para o debate crescente a respeito dos conceitos, representações e construção de significado. Nesse sentido, julga-se enfatizar e estabelecer um diálogo acerca dos aspectos conceituais na construção do conhecimento.

Conceito em matemática

Pretende-se admitir que, ao trabalhar com conceito, se busca a compreensão de um saber que será definido formalmente.

> Então, se requer uma aproximação e um desvelar do conceito, como pré-requisito do ato de definir. Que a definição aflore, e se mostre após a aquisição conceitual pelo estudante, isto é, que o ato de conceituar preceda ao ato de definir. Assim, ao processar a definição, pelas representações utilizadas, pode ser gerado um espaço no qual os elementos constituintes do conceito se explicitam e, se mostram com possibilidades de serem melhor assimilados. (LAUDARES, 2013, p. 7)

Tall e Vinner (1981), para tratar da apreensão das entidades matemáticas distinguem: "conceito imagem" e "conceito definição". O conceito imagem, segundo os autores, expressa a estrutura cognitiva total, que relaciona ao conceito, a qual engloba todas as imagens mentais, propriedades e processos associados. É edificado ao longo dos anos, a partir das experiências de diversos níveis, transformando quando o sujeito encontra novos estímulos e amadurece (TALL; VINNER, 1981, p. 152). Já o conceito definição é a forma com a qual as palavras foram empregadas para especificar algum conceito. Pode ser compreendido por um indivíduo de uma forma corriqueira ou assimilado mais significativamente e relacionado com o conceito. Também pode ser uma reelaboração pessoal de uma definição pelo estudante (TALL; VINNER, 1981, p. 152).

Ainda segundo os autores, ao apresentar um conceito a um aluno, convicções e objetos mentais são elaborados e articulados pelo mesmo, e configuram uma entidade que posteriormente será usada em outras situações. A formulação dessa entidade é subjetiva e particular, pois, a partir de uma mesma apresentação, cada indivíduo constrói suas próprias ideias e figuras mentais.

A estrutura criada e internalizada de um certo conceito pelo aluno nem sempre é uma estrutura formal, uma definição precisa. Durante a apresentação e articulação de um conceito, existem inúmeras variáveis que podem interferir nesse processo, como Tall e Vinner (1981) declaram. Essas variáveis podem inferir e interferir, afetando seu significado e aplicação.

> Se conceituar, em Matemática, é uma atividade de compreensão do objeto em estudo e da criação subjetiva de significados pelo estudante, definir é, pela formalização manipular símbolos, registros, sinais da linguagem específica da área de conhecimento, na qual está imersa o objeto matemático, o conceito em estudo. (VAZ, 2010, p. 39)

A elaboração de estruturas matemáticas exige a interação conceito *versus* definição. Nesse processo, a manipulação dos objetos, o domínio simbólico da linguagem com registros, códigos e representações favorecem e promovem a construção da definição. Em consonância com Laudares (2013, p. 3), ao processar a cognição, "o homem, ser inteligente e de linguagem, constrói internamente suas ideias, num processo de interiorização com apropriação e, as comunica servindo de interações e intercomunicações sociais, via linguagem". Desse modo, para que haja uma construção interiorizada do conhecimento, é necessário que o sujeito desenvolva uma construção mental. E, inserida nesse contexto, a pesquisa teve como objetivo instigar a construção de conhecimento a partir de aspectos conceituais, com a colaboração de recursos computacionais, promovendo a diversidade de representações, visando à melhoria do processo de ensino e aprendizagem desse conteúdo.

TECNOLOGIA E EDUCAÇÃO

Discorrendo sobre o uso de recursos tecnológicos, as principais discussões da atualidade, no campo da educação matemática, se referem à utilização de uma multiplicidade de instrumentos. Recursos como *softwares* educacionais têm um grande potencial pedagógico que pode contribuir no processo de ensino e aprendizagem. Caminhando pelas abordagens tecnológicas, Behrens (2000) afirma que, num mundo globalizado, que derruba barreiras de tempo e espaço, o acesso à tecnologia exige atitude crítica e inovadora, possibilitando o relacionamento com a sociedade como um todo.

Diante de um cenário de globalização, é importante suscitar um ensino e aprendizagem que viabilizem possibilidades transformadoras: experimentação, investigação, e teorização, que promovam a reflexão e a ação, gerando novos conhecimentos, numa tentativa de superar as práticas pedagógicas de ensino tradicional. Desse modo, recorre-se às TICs (Tecnologia da Informação e Comunicação) em práticas educativas que objetivam fomentar a produção de significados.

> Aprendemos quando descobrimos novas dimensões de significação que antes se nos escapavam, quando vamos ampliando o círculo de compreensão do que nos rodeia, quando,

> como numa cebola, vamos descascando novas camadas que antes permaneciam ocultas à nossa percepção, o que nos faz perceber de uma outra forma. Aprendemos mais quando estabelecemos pontes entre reflexão e a ação, entre a experiência e a conceituação, entre a teoria e a prática; quando ambas se alimentam mutuamente. (MORAN, 2000, p. 23)

O computador pode ser incorporado como recurso pedagógico como apoio para o ensino, e também como fonte de aprendizagem, promovendo o desenvolvimento de habilidades e motivando a construção de novos conhecimentos, sobretudo como um processo de socialização. As novas tecnologias, como o computador, permitem a investigação matemática, facilitam e propiciam uma atitude de experimentação, instigam a participação dos alunos e seu saber é valorizado. Os alunos aprendem com seus erros, tomam decisões por si mesmos, identificam problemas, refletem, argumentam, levantam conjecturas e aprendem junto aos seus colegas, trocando ideias quando se trata de atividades colaborativas.

> Endentemos que também essa concepção de incorporar tecnologia admite dois níveis de entendimento. Num primeiro destes, o professor entende que em virtude do acúmulo de experiências pessoais com o uso de tecnologias, a incorporação da tecnologia pelo educando se acentua e as formas de fazer matemática se modificam: o uso de calculadoras gráficas, o uso de calculadoras simbólicas, o uso de simulações, a construção de modelos, o teste de hipóteses numéricas dentre outras, passam a constituir o arsenal de estratégias que se usa para fazer matemática. [...]. Num segundo nível, o professor entende que a incorporação de novas formas de fazer matemática leva os educandos a desenvolverem novas formas de pensar e resolver problemas. (FROTA, 2012, p. 6)

É nessa vertente que se pretende conceber as TICs na pesquisa de que trata o presente artigo, comprometidos com a tecnologia a serviço da educação matemática, a qual facilita a visualização gráfica, sobretudo na forma de representação que contribui fortemente para a apreensão dos conceitos matemáticos, como promotora de conhecimento, integrante, desafiadora, reflexiva e ativa nesse processo. Nesse contexto, compete aos educadores suscitar este diálogo: aprendizagem e apropriação, utilizando a tecnologia, transformando a prática, intensificando as potencialidades pedagógicas.

Neste trabalho, também foram utilizados recursos da Informática com Objetos de aprendizagem. Entende-se que, a partir de recursos computacionais,

> [...] pode-se ter a dimensão conceitual com a manipulação de um Objeto de Aprendizagem – OA, definido por Willie (2000), como entidades digitais a serem utilizadas, reutilizadas no processo de aprendizagem apoiado pela tecnologia. Com um OA, o professor prepara um material de apoio, a ser manipulado pelo estudante com possibilidade de apresentar uma série de situações de maneiras diversificadas conduzindo a um contexto, a estimular a reflexão num processo contínuo de mobilização e facilita o trabalho com o conceito. (LAUDARES, 2013, p. 6)

A fim de abordar algumas das questões nas quais os alunos foram provocados no desenvolvimento de Limite, é importante examinar algumas atividades em curso na construção de significado elaborado pelos estudantes. Para tanto, na pesquisa, foram elaboradas oito atividades investigativas guiadas, apoiadas em recursos computacionais, com a finalidade de promover a construção, interpretação e compreensão dos conceitos matemáticos referentes aos tópicos de Limite.

ATIVIDADES E ANÁLISE

Dentre as atividades propostas e aplicadas, apresenta-se neste artigo a atividade de número 4, com a análise de sua aplicação.

4ª Atividade: Limites laterais

Objetivo: Estudar o levantamento de indeterminação de limite de uma função.

Comentários: A atividade requer que o aluno compreenda o gráfico numa perspectiva aritmética de uma função com restrição, o significado de limite num ponto determinado, bem como analisar o comportamento do gráfico de uma função em uma vizinhança determinada.

Desenvolvimento: Esta atividade será desenvolvida a partir do *software Geogebra*.

1) Dada a função $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2}$.

a) Determine o domínio desta função.

No *Geogebra*:

b) Na 11ª janela, ir em opção: controle deslizante, clicar, depois clicar na janela de visualização, nomear como k, intervalo mínimo: -10, máximo: 10, incremento 0,1. Aplicar.

Entrada: A = (k,(2*k^2-3*k-2)/(k-2))

Ir na barra de ferramenta: exibir janela de visualização 2. Clicar na janela de visualização 2 e na mesma opção para entrada da janela 1, inserir o ponto B = (k, 2*k+1).

No ponto A e no ponto B com mouse "direito": habilitar rastro.

1ª janela: mover – Variar o parâmetro K.

Observe a variação dos elementos do ponto A e B na janela de álgebra.

c) Analisando os gráficos, compare o domínio destas funções no ponto de abscissa 2, com o resultado do item (a). Explicite com suas palavras.

d) O que se pode conjecturar a respeito das funções nas janelas 1 e 2? Explicite suas ideias.

e) Construa uma tabela com os valores próximos ao 2, da função $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2}$ pela direita e pela esquerda:

x						
$f(x)$						

x						
$f(x)$						

f) Analisando o gráfico da função $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2}$, descreva o que acontece com os valores de y, quando:

- os valores de x se aproximam de 2 pela direita?
- os valores de x se aproximam de 2 pela esquerda?

g) A função $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2}$ pode assumir valores tão próximos de _____ quanto se deseja, desde que x fique suficientemente próximo de ____.

h) Verifique que no ponto $x = 2$, a função não se define, mas os limites à direita e à esquerda são iguais, então,

$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2}$ = ________.

* Trace o gráfico o $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2}$ no *Geogebra* e atente às limitações do *software*.

Compare sua redação com esta análise: Notamos que a ideia de limite de uma função f, quando x tende para a, depende somente dos valores de x próximos de a. Não importa o valor de $f(a)$. Ao calcular o $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2}$, observamos que a função não está definida para $x = 2$, isto é, não existe $f(2)$, e existe o limite de $f(x)$ quando x tende a 2.

Respostas fornecidas por alguns alunos (sobre os itens C, D, H e G):

Aluno (1), item C:

Figura 3

Podemos observar que o domínio da função é
$\{x \in R / x \neq 2\}$

Aluno (1), item D:

Figura 4

Na janela 1 o gráfico considerado foi $F(x) = \frac{2x^2-3x-2}{x-2}$
e na janela 2 a função fatorada e já cancelada $F(x) = 2x+1$
sem restrição no domínio

Aluno (1), item G:

Figura 5

Aproxima de 5

Aluno (1), itens H e I:

Figura 6

h) A função $f(x) = \frac{2x^2-3x-2}{x-2}$ pode assumir valores tão próximo de 5 quanto se deseja, desde que x fique suficientemente próximo de 2.

i) Verifique que no ponto $x=2$, a função não se define, mas os limites à direita e à esquerda são iguais, então $\lim_{x \to 2} \frac{2x^2-3x-2}{x-2} = 5$.

Aluno (2), item C:

Figura 7

Na janela 1 o domínio foi $\{x \in R / x \neq 2\}$ e
na janela 2 foi $D = R$

Aluno (2), item D:

Figura 8

São iguais, os gráficos são os mesmos

Aluno (2), itens H e I: Apresentou a mesma resposta que o aluno (1).

Aluno (3), item C:

Figura 9

No Geogebra o domínio da função é
$\{x \in R / x > -1\}$

Aluno (3), item D: à direita

Figura 10

Oscila entre 1 e 2

À esquerda:

Figura 11

Até determinado momento cresce e depois começa a decrescer

Aluno (3), itens H e I:

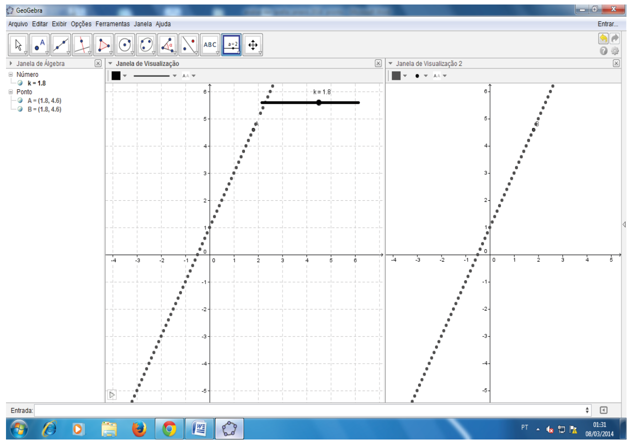
Figura 12

h) A função $f(x) = \frac{2x^2-3x-2}{x-2}$ pode assumir valores tão próximo de 0 quanto se deseja, desde que x fique suficientemente próximo de 2.

i) Verifique que no ponto $x=2$, a função não se define, mas os limites à direita e à esquerda são iguais, então $\lim_{x \to 2} \frac{2x^2-3x-2}{x-2} =$ indeterminado

Figura 13

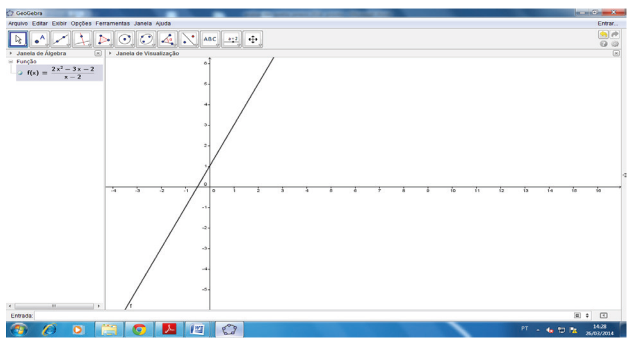
Gráfico 1 – Atividade 4 – Item B.



Fonte: Criado pelos alunos – Imagem da atividade realizada pelos alunos, trabalhando o discreto e o contínuo, além da visualização do salto e análise do domínio.

Figura 14

Gráfico 2 – Atividade 4 – Item G.



Fonte: Criado pelos alunos – Imagem da atividade realizada pelos alunos, trabalhando o discreto e o contínuo, além da visualização do salto e análise do domínio.

ANÁLISE DAS RESPOSTAS

CATEGORIA A: Interpreta e resolve corretamente. Nessa categoria, entende-se que o aluno compreende a tarefa e o que foi proposto. Desenvolve e apresenta a resposta corretamente. O aluno consegue distinguir os objetos matemáticos e as diversificadas representações. Por exemplo: alunos (1) em todos os itens. Convergindo com as teorias de Duval,

> [...] não se pode ter compreensão em matemática, se nós não distinguimos um objeto de sua representação. É essencial jamais confundir os objetos matemáticos, como os números, as funções, as retas, etc., com suas representações, quer dizer, as escrituras decimais ou fracionárias, os símbolos, os gráficos, os traçados de figura... porque um mesmo objeto matemático pode ser dado através de representações muito diferentes. (DUVAL, 2009, p. 14)

CATEGORIA B: Erro de resolução. Nessa categoria, o aluno não correlaciona as representações diferentes de um mesmo objeto, ou seja, não compreende as várias representações de modelos matemáticos, como, por exemplo, no estudo de funções, não estabelece conexão entre o aritmético, tabulação das coordenadas de uma função e a apresentação no plano cartesiano, bem como o gráfico (contínuo) dessa mesma função e/ou as restrições no domínio. Também, quando diz que há limite, mas o limite da função não existe, ou diz que o limite tende ao infinito, quando o limite tende a uma constante. Nesse sentido, o aluno (3) não interpreta o domínio da função corretamente. Podendo esse erro ser o produto de uma leitura equivocada do programa, ou seja, quando esse aluno se depara com o esboço do gráfico, visualiza superficialmente o objeto, limitando sua interpretação apenas aos valores que pode ver na interface do *software*, sem atentar que o esboço é referente à capacidade da tela do computador, mas que, se der um zoom *n* vezes, é possível constatar que o gráfico não está limitado a um certo intervalo.

Essa atividade propõe a construção gráfica contribuindo para a compreensão da continuidade ou descontinuidade de uma função, podendo verificar a conversão aritmética *versus* geométrica a partir da visualização da interface do *Geogebra*; e, desse modo examinar o que representa geometricamente uma indeterminação, observando o salto no gráfico.

Analisando os esboços dos gráficos (Gráfico 1), plotados simultaneamente nas janelas de visualização 1 e 2, ambos feitos a partir do controle deslizante, vê-se que ele traz a ideia do discreto, do numérico, em que a função, pelo processo de conversão de Duval, é representada por um gráfico, porém, construído ponto a ponto pelo efeito do "habilitar rastro" e animação.

Salientamos que na janela 1 há um salto no gráfico para x igual a 2, mas a janela 2 apresenta a continuidade, e confrontando com o Gráfico 2, ao inserirmos a função

$$f(x)=\frac{2x^2-3x-2}{x-2}=\frac{(2x+1)(x-2)}{(x-2)}$$

na *entrada* do *Geogebra*, o mesmo nos fornece o esboço do gráfico sem restrições; nesse caso, podemos afirmar que esse fenômeno ocorre a partir da limitação do *software* que, ao se inserir a função, faz uma leitura, e projeta uma imagem fundamentada em programação alicerçada em propriedades e elementos matemáticos. Assim, o *Geogebra* entende e expressa uma resposta da função já trabalhada algebricamente, ou seja, o gráfico sem restrições.

Percebe-se o que o erro ocasionado pelo aluno (3) foi não correlacionar as situações das duas janelas do *Geogebra* e o Gráfico 2, ao analisar o comportamento dessa função nas vizinhanças do ponto x = 2, ponto este que não pertence ao domínio da função. Constata-se que essa função se aproxima rapidamente do valor 5, quando os valores de x se aproximam de 2, tanto por valores de $x < 2$ (à esquerda de 2) como por valores $x > 2$ (à direita de 2).

Há diversos exemplos sobre o cálculo de limites nos quais se confronta com situações em que o quociente do numerador com o denominador é nulo, em alguns casos, podemos sair dessa situação a partir de manipulações algébricas. Vale lembrar que o limite do quociente é o quociente dos limites somente quando os limites do numerador e do denominador existem, sendo o do denominador diferente de zero. Logo, o *software* entende que há manipulação algébrica e apresenta esboço da função após o algebrismo.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O eixo norteador da pesquisa apresentada refere-se ao estudo de Limite e continuidade, conceitos básicos do Cálculo. Percebe-se uma mudança na atitude dos estudantes como reflexos na prática educativa em sala de aula, uma transposição de uma aula expositiva passo a passo para uma abordagem conceitual, mediada por uma atividade interativa e participativa, a partir das TICs. Nesse novo ambiente, os sujeitos envolvidos numa atividade colaborativa são responsáveis pelo fazer matemático.

Buscou-se embasamento teórico de Duval (2009), que discute a importância dos registros de representação semiótica para o processo de ensino e aprendizagem da matemática, como articulação do pensamento entre as várias representações do objeto matemático, fundamentando-se no processo que o mesmo autor domina de conversão.

Refletiu-se sobre as diversas interpretações do ensino de Cálculo; a linguagem matemática está presente nos Três Mundos de Tall (1981), assim como se pode descrever essa relação na construção do conhecimento acerca de Limite: na primeira fase, a intuição; na segunda, a construção do conceito de limite; e, por fim, a terceira, a definição formal.

Evidencia-se que o processo de conversão, transposição das múltiplas representações dos objetos matemáticos, de acordo com Duval (2009), acontecem a todo momento na construção conceitual, como na transposição algébrica-gráfica, ou geométrica-numérica. Deve-se ressaltar que, segundo o mesmo autor, a compreensão conceitual, a interpretação dos objetos e enunciados se relacionam com a capacidade de articulação, a coordenação de alguns registros semióticos, e a relação entre *noesis* (conceito) e *semiois* (representação). Nessa perspectiva, a apropriação do conhecimento necessita da consciência dessa representação, a qual permite o diálogo entre o sujeito e as atividades cognitivas, favorecendo uma diversidade de registros de representação sobre um mesmo objeto matemático.

Na elaboração das atividades, procurou-se efetivar o uso das TICs como recurso facilitador, instigando descobertas, e oportunizar o levantamento de conjecturas e a elaboraração de conclusões a partir de um espírito participativo, colaborativo e sedutor, tanto para o docente quanto para o discente. É importante salientar que o uso das tecnologias para o ensino e a aprendizagem de conceitos, como no estudo de Limite e Continuidade, propicia compreensão e apreensão dessas entidades matemáticas, num processo que permite que o sujeito dialogue com esse objeto.

As consequências do desenvolvimento das tarefas como instrumento de apoio em sala de aula, bem como proposta metodológica, têm implicações na forma como o sujeito interage com os objetos matemáticos, reflete, organiza suas ideias e se apropria do conhecimento. Dessa forma, o professor tem a oportunidade de acompanhar e avaliar todo o processo, pois, no exercício da comunicação das ideias, seja oral ou escrita, o sujeito necessita estruturar, sintetizar, refletir, conjecturar, e esse processo leva o aluno a demonstrar os conhecimentos adquiridos.

Percebe-se que houve um avanço significativo no processo de aprendizagem do conteúdo proposto. Isso nos leva a aceitar a didática da ação para a elaboração conceitual, isto é, a importância de se construir um conceito matemático antes de defini-lo. Isso não significa dar mais ou menos importância às definições, mas sim permitir um maior e melhor entendimento delas. De acordo com Pais (2001), ao aprender o significado de um conceito, extrapola-se o texto formal de uma definição, o que confirma as expectativas da pesquisadora na possibilidade de construção de um conhecimento com compreensão.

Portanto, apresenta-se uma prática educativa que se espera colabore para a aquisição de saberes, no processo de ensino e aprendizagem de Limite, proporcionando uma (res)significação e desenvolvendo conceitos de forma significativa, a partir de tarefas que efetivam os objetos de aprendizagem, aliados ao uso da tecnologia.

REFERÊNCIAS

BARUFI, M. C. B. **A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral**. Tese de Doutorado. São Paulo: FE-USP, 1999.

BEHRENS, Marilda Aparecida. **A prática pedagógica e o desafio do paradigma emergente**, Brasília, v. 80, n. 196, p. 383-403, set./dez. 1999. Disponível em: <http://emaberto.inep.gov.br/index.php/RBEP/article/viewFile/167/166>. Acessado em 16 jan. 2013.

DUVAL, Raymond. **Semiósis e pensamento humano**. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

FROTA, Maria Clara Rezende. **Perfis de entendimento sobre o uso de tecnologias na educação matemática**. Belo Horizonte: FUMARC, 2001. Disponível em: www.ufrrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs.../perfis.Acesso: junho-2013. Acessado 20 dez. 2017.

FROTA, Maria Clara Resende. Duas abordagens distintas da estratégia de resolução de exercícios no estudo de cálculo. In: LAUDARES, João Bosco; LACHINI, Jonas (Orgs.). **Educação Matemática:** a prática educativa sob o olhar de professores de cálculo. Belo Horizonte: FUMARC, 2001.

LACHINI, Jonas. **Subsídios para explicar o fracasso de alunos em cálculo**. Belo Horizonte: FUMARC, 2001.

LAUDARES, João Bosco, LACHINI, Jonas. **O uso do computador no ensino de matemática**. Belo Horizonte: FUMARC, 2001.

LAUDARES, João Bosco. **O conceito e a definição em matemática**: aprendizagem e compreensão. XI ENEM, Curitiba, 2013.

LAUDARES, João Bosco. A Matemática e a Estatística nos cursos de graduação da área tecnológica e gerencial: um estudo de caso da PUC-Minas. In: CURY, Helena Noronha (Org.). **Disciplinas matemáticas em cursos superiores:** reflexões, relatos, propostas. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2004.

MASSETO, Marcos T. MORAN, José Manuel, BEHRENS, Marilda A. **Novas tecnologias e mediação pedagógica**. Campinas: Papirus, 2000.

MESSIAS, Maria Alice; COSTA, Acylena Coelho. **Limite de função:** conceito imagem x conceito definição. X Encontro Nacional de Educação Matemática, SBEM, Salvador, 2010.

MEYER, J. F. C.; SOUZA JÚNIOR, A. J. A utilização do computador no processo de ensinar-aprender Cálculo: A constituição de grupos de ensino com pesquisa no interior da universidade. In: **Zetetiké**, Campinas, CEMPEM/FE/UNICAMP, v. 10, n. 17/18, p. 113-146, 2002.

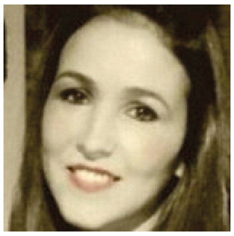
MORAN, José Manuel *et al.* **Novas tecnologias e mediação pedagógica**. 6. ed. Campinas: Papirus, 2000.

PAIS, Luiz Carlos. **Didática da matemática**: uma análise da influência francesa. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

TALL, David; VINNER, Shlomo. **Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits en continuity.** University of Warwick. n. 12, p. 151-169. Disponível em: <http:homepages. p. warwick.ac.uk/stff/DAVID.Rall/pdfs/dot1981a-concept-image.pdf->. Acessado em 22 jan. 2013.

VAZ, Iêda do Carmo. **Os conceitos de limite, derivada e integral em livros didáticos de cálculo e na perspectiva de professores de matemática e de disciplinas específicas em cursos de engenharia.** Dissertação (Mestrado em Educação Tecnológica) – CEFET-MG, Belo Horizonte, 2010.

DADOS DOS AUTORES



Daniela A. da S. Moura, licenciatura em Matemática (FAPAM, 2006), especialista em Cálculo (UFMG, 2010); mestre em Ensino de Ciências e Matemática (PUC-MINAS, 2014). Professora ensino superior FAPAM desde 2007 e coordenadora de projetos FAPAM desde 2014. Suas linhas de pesquisa são em Educação Matemática e Tecnologia na Educação, Etnomatemática, Educação. Tem experiência na área de Educação, com ênfase em Educação Matemática, atuando principalmente nos seguintes temas: Cálculo Diferencial e Integral, Fundamentos de Matemática, Metodologia de Matemática para o ensino básico e superior.

João B. Laudares, possui doutorado em Educação: História, Política, Sociedade, pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (1998); mestrado em Tecnologia pelo CEFET-MG (1992); graduação em Matemática pela UFMG (1970). Atualmente, é professor titular dos cursos de Graduação e do Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais – PUC-MINAS e pesquisador em Educação Profissional – Educação e Trabalho do CEFETMG. Suas linhas de pesquisa são em Educação Matemática e Educação Profissional Técnica e Tecnológica – Educação e Trabalho. Tem experiência na área de Educação, com ênfase em Educação Matemática e Educação Profissional Tecnológica e Técnica, atuando principalmente nos seguintes temas: metodologia de Matemática para o ensino básico e superior, educação profissional: educação e trabalho.