

Figura 4 - Fluxograma (continuação)

ARTIGO

ELEMENTOS HIDRÁULICOS E GEOMÉTRICOS DO ESCOAMENTO CRÍTICO EM CANAIS TRAPEZOIDAIS

R.M. Porto*
 V. Arcaro**

PORTO, R.M.; ARCARO, V. Elementos Hidráulicos e Geométricos do escoamento Crítico em Canais Trapezoidais. *Rev. Ensino Eng.*, São Paulo, 3(1): 17-23, 1.º sem. 1984.

Os problemas sobre a determinação dos parâmetros do escoamento crítico em canais trapezoidais, devido a relativa complexidade geométrica, são habitualmente resolvidos por processos de tentativas ou pelo uso de famílias de curvas, algumas vezes com perda da precisão. Para superar estes inconvenientes, e facilitar a resolução dos exercícios na disciplina Hidráulica, este trabalho apresenta quatro curvas adimensionais que resolvem todos os problemas do escoamento crítico em canais trapezoidais, com uma precisão condizente com as aplicações práticas.

Escoamento crítico. Altura crítica. Largura de fundo. Canais trapezoidais.

PORTO, R.M.; ARCARO, V. Hydraulic and Geometric Elements for the Critical Flow in Trapezoidal Channels. *Rev. Ensino Eng.*, São Paulo, 3(1):17-23, 1.º sem. 1984.

Problems on determination of the parameters of critical flow in trapezoidal channels, of moderate geometrical complexity, are usually solved by trial and error or by using a family of curves, with occasional loss of precision. To overcome such drawbacks, and to ease the solution of exercises in Hydraulics courses, four non-dimensional curves are present in this work, which solve all problems of critical flow in trapezoidal channels, with precision suited to practical applications.

Critical flow. Critical height. Trapezoidal channels.

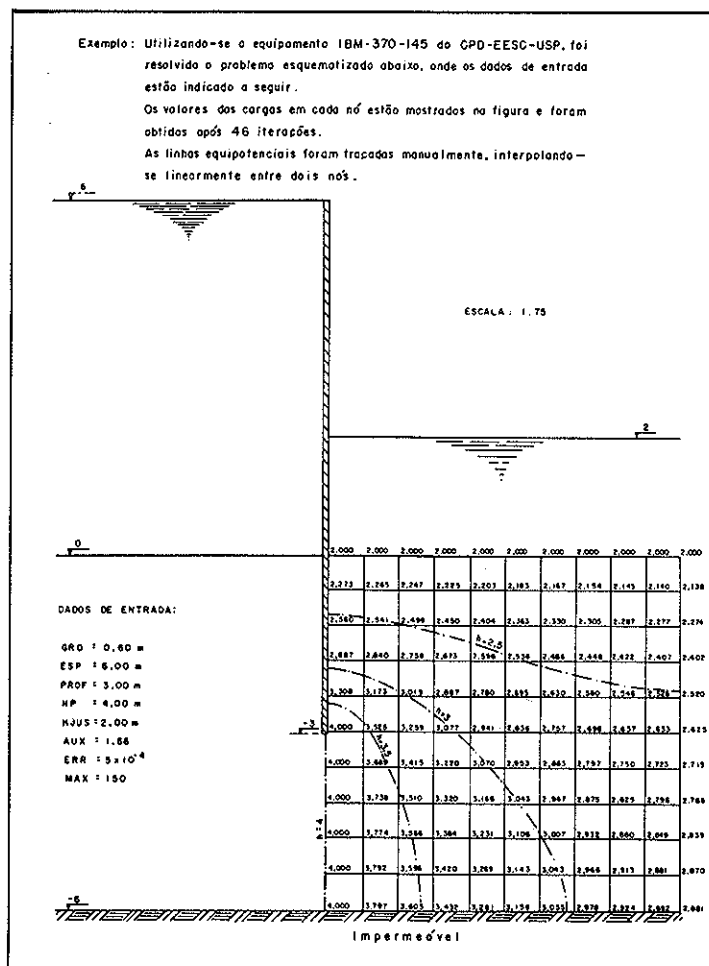


Figura 4 - Exemplo

4 CONCLUSÕES

O trabalho apresenta aos alunos de graduação em engenharia civil, uma forma simples de utilizar o computador para a solução do problema de cálculo de cargas totais em um terreno de fundação, onde existe uma cortina impermeável, e conseqüente traçado da rede de percolação.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- DESAL, C.S.; CHRISTIAN, J.T. (1977): *Introduction, Numerical Methods and Special Topics*, in: "Numerical Methods in Geotechnical Engineering", Cap. 1, 1-64, Mc Graw-Hill Book Co., N.Y.

1 INTRODUÇÃO

Uma seção de um canal onde esteja ocorrendo escoamento crítico, isto é, situação física na qual certa vazão escoam com a mínima energia específica, é uma seção de controle do escoamento, desde que exista uma correlação entre a profundidade crítica e a vazão.

Tal seção é um local interessante para se promover a medida da vazão pela leitura da profundidade crítica ou de outra qualquer profundidade que possa ser correlacionada com a profundidade crítica.

No caso dos canais trapezoidais, os parâmetros importantes envolvidos no escoamento são: Q vazão através da seção, E_c energia específica, que é a mínima compatível com a vazão, y_c profundidade ou altura crítica, b largura de fundo da seção, B largura da seção na superfície livre, Z cotangente do ângulo dos taludes, A área molhada da seção.

* Departamento de Engenharia de Produção — Universidade Federal de São Carlos.
 ** Aluno do Curso de Engenharia Civil na Faculdade de Engenharia de Limeira — UNICAMP.

Assim, é importante se fazer o relacionamento das variáveis hidráulicas e geométricas envolvidas no escoamento, para se estabelecer expressões adimensionais que levam a resolução dos quatro principais problemas que podem ser gerados por tais variáveis.

Para os canais trapezoidais foram desenvolvidas expressões adimensionais explícitas que podem ser, em cada caso, representadas por uma simples curva, que leva a determinação rápida e sem processos de tentativas, dos parâmetros y_c , b ou Q .

As curvas são de uso fácil, propiciando uma precisão no cálculo dos parâmetros, superior aquela encontrada em gráficos existentes na literatura (ver referência 1). Além disso, todos os quatro problemas são resolvidos, individualmente, por uma determinada curva, sem necessidade de se utilizar famílias de curvas.

Os procedimentos numéricos foram desenvolvidos com o objetivo de propiciar uma maior rapidez na resolução dos problemas relativos ao escoamento crítico, dentro da disciplina Hidráulica.

2 TIPOS DE PROBLEMAS

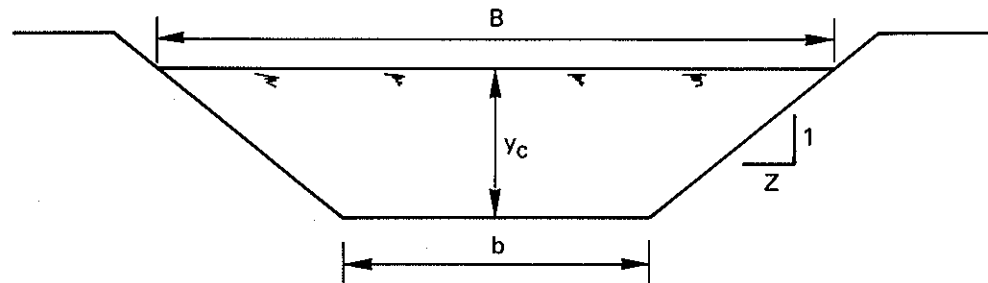
Os quatro principais tipos de problemas foram resolvidos e são apresentados a seguir, com algumas etapas algébricas omitidas para diminuir o trabalho de apresentação.

2.1 Problema 1

O mais importante problema é a determinação da profundidade crítica y_c , conhecendo-se Q , b , e Z . Isto pode ser feito facilmente a partir da expressão geral do escoamento crítico, cuja expressão é:

$$\frac{Q^2 B}{gA^3} = 1 \tag{1}$$

De acordo com a notação da figura abaixo, pode-se escrever:



$$B = b + 2y_c Z \tag{2}$$

$$A = (b/y_c + Z) y_c^2 \tag{3}$$

que levadas em (1), fica:

$$\frac{Q^2 (b + 2y_c Z)}{g [(b/y_c + Z) y_c^2]^3} = 1 \tag{4}$$

Desenvolvendo e adimensionalizando a equação (4), chega-se a:

$$\frac{Q^2 Z^3}{gb^5} = \frac{(b/y_c Z + 1)^3}{(b/y_c Z + 2)} \frac{Z^5 y_c^5}{b^5} \tag{5}$$

Fazendo: $\Psi = b/y_c Z$, tem-se:

$$QZ \sqrt{\frac{Z}{gb^5}} = \frac{(\Psi + 1)^{3/2} \Psi^{-5/2}}{(\Psi + 2)^{1/2}} \tag{6}$$

Com, $\tau = QZ \sqrt{\frac{Z}{gb^5}}$ a equação (6) é uma expressão adimensional da forma $\Psi = f(\tau)$, que pode ser posta em gráfico, como na Figura 1.

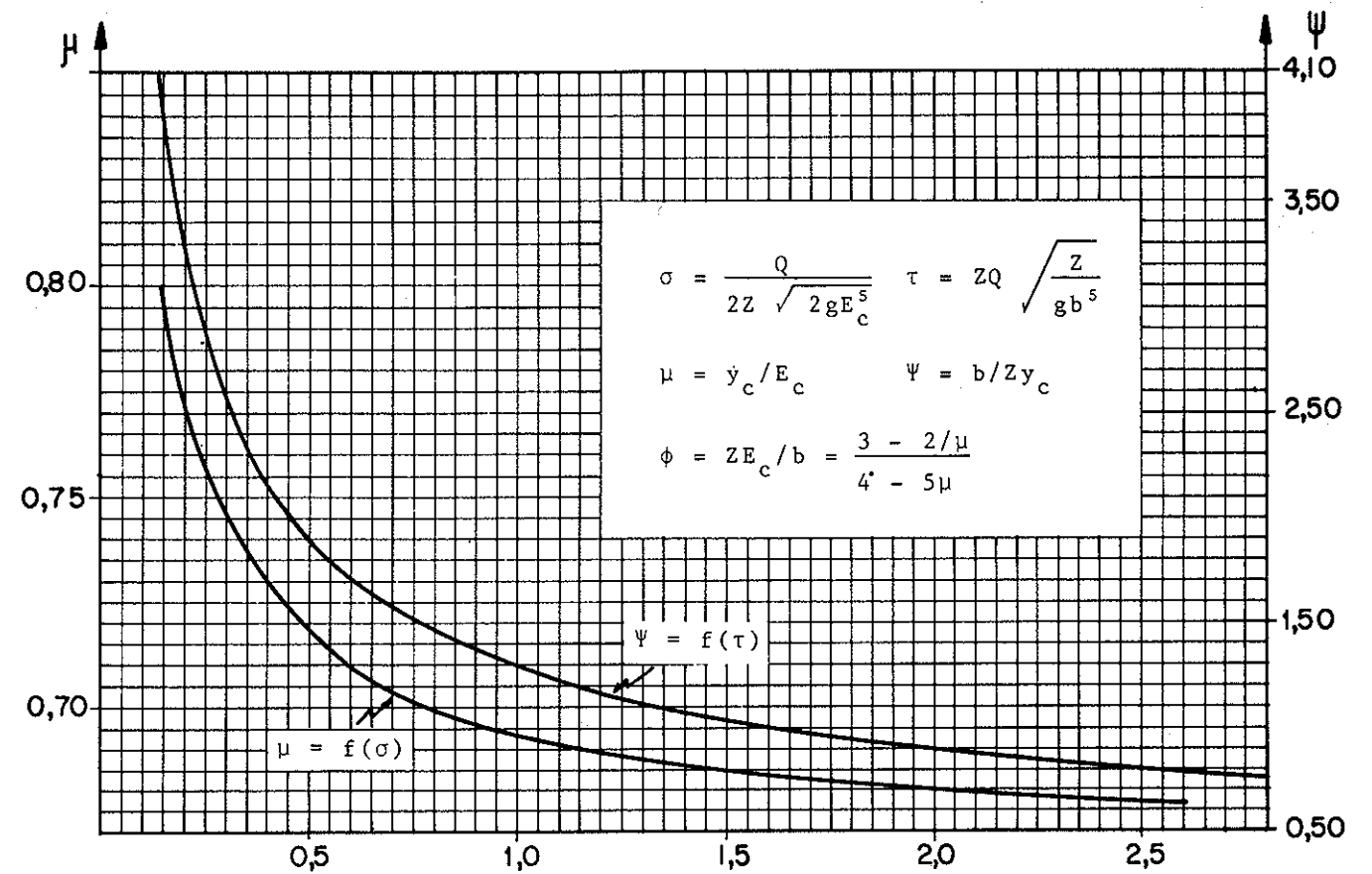


Figura 1 - Resolução dos problemas 1 e 2 σ ou τ

2.2 Problema 2

Em muitos problemas práticos, como por exemplo, a alimentação de um canal de forte declividade por um reservatório, um dado inicial importante é a energia específica mínima, que na ausência de perdas na entrada do canal e negligenciando a velocidade de aproximação da água para o canal, é igual a diferença de cotas entre o nível d'água no reservatório e o fundo do canal, na seção de entrada. Conhecendo-se Q , E_c e Z , pode-se gerar soluções explícitas para a determinação de y_c e b .

Partindo-se da equação da energia específica e da expressão geral do escoamento crítico, tem-se:

$$E_c = y_c + \frac{Q^2}{2gA^2} \text{ e } \frac{Q^2 B}{gA^3} = 1 \tag{7}$$

Por substituição, chega-se a:

$$E_c = y_c + \frac{A}{2B} \therefore A + 2B(y_c - E_c) = 0 \tag{8}$$

Substituindo (2) e (3) em (8) e desenvolvendo fica:

$$5Zy_c^2 + 3by_c - 4Zy_c E_c - 2bE_c = 0 \tag{9}$$

Fazendo $\mu = y_c/E_c$ e $\phi = ZE_c/b$, levando em (9) e simplificando vem:

$$5\phi\mu^2 + (3 - 4\phi)\mu - 2 = 0 \quad (10)$$

A equação (10) é uma equação do segundo grau em μ , cujas raízes e propriedades serão discutidas a seguir.

O determinante da equação vale:

$$\Delta = (3 - 4\phi)^2 + 40\phi \rightarrow \Delta = 16\phi^2 + 16\phi + 9 \quad (11)$$

Seja $h(\phi) = 16\phi^2 + 16\phi + 9$, portanto as raízes da equação (10) são:

$$\mu = \frac{(4\phi - 3) \pm \sqrt{h(\phi)}}{10\phi} \quad (12)$$

Como $Z > 0$ e $\phi > 0$, é fácil mostrar que $\sqrt{h(\phi)} > (4\phi - 3)$, assim, a raiz com significado físico é:

$$\mu = \frac{(4\phi - 3) + \sqrt{h(\phi)}}{10\phi} \quad (13)$$

Esta função é estritamente crescente, isto é, $d\mu/d\phi > 0$.

Examinando os extremos da função quando $\phi \rightarrow 0$ e $\phi \rightarrow \infty$, tem-se:

$$\lim_{\phi \rightarrow 0} \mu = \lim_{\phi \rightarrow 0} \frac{4 + \frac{h'(\phi)}{2\sqrt{h(\phi)}}}{10} \quad (\text{L'Hopital}) = \frac{4 + 16/6}{10} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{\phi \rightarrow \infty} \mu = \lim_{\phi \rightarrow \infty} \frac{(4 - 3/\phi) + \sqrt{16 + 16/\phi + 9/\phi^2}}{10} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

Como $d\mu/d\phi > 0$, para $\phi > 0 \rightarrow \frac{2}{3} < \mu < \frac{4}{5}$

Isto é, para uma dada energia específica a profundidade crítica em uma seção trapezoidal, encontra-se entre as correspondentes da seção retangular e da seção triangular.

Retornando a equação (13), pode-se escrever:

$$10\phi\mu = (4\phi - 3) + \sqrt{16\phi^2 + 16\phi + 9} \quad (14)$$

Desenvolvendo chega-se a:

$$\phi = \frac{3 - 2/\mu}{4 - 5\mu} \quad (15)$$

Expressão adimensional que, uma vez conhecidos E_c , Z e b determina-se a profundidade crítica y_c , ou conhecidos E_c , Z e y_c , determina-se b .

Dentro desta mesma linha, pode-se, conhecendo-se Q , Z e E_c determinar y_c e daí b , da seguinte maneira:

$$E_c = y_c + \frac{Q^2}{2gA^2} \rightarrow (y_c - E_c)A^2 + \frac{Q^2}{2g} = 0 \quad (16)$$

Das equações (3) e (15), de $\mu = y_c/E_c$ e $\phi = ZE_c/b$, pode-se escrever:

$$A = Z\mu E_c^2 \left(\mu + \frac{1}{\phi} \right) = Z\mu E_c^2 \left(\mu + \frac{4 - 5\mu}{3 - 2/\mu} \right) \quad (17)$$

Substituindo (17) em (16), fica:

$$(\mu E_c - E_c) \left[Z\mu E_c^2 \left(\mu + \frac{4 - 5\mu}{3 - 2/\mu} \right) \right]^2 + \frac{Q^2}{2g} = 0 \quad (18)$$

Expressão que convenientemente trabalhada, torna-se:

$$\frac{Q}{2Z\sqrt{2gE_c^3}} = \frac{(1 - \mu)^{3/2}\mu}{(3 - 2/\mu)}; Z > 0 \text{ e } \frac{2}{3} < \mu < \frac{4}{5} \quad (19)$$

Fazendo $\sigma = \frac{Q}{2Z\sqrt{2gE_c^3}}$ a equação adimensional anterior é da forma $\mu = f(\sigma)$ e pode ser posta em gráfico, como na Figura 1.

2.3 Problema 3

Henderson (1) apresenta como um problema importante a determinação da largura de fundo b , de um canal trapezoidal, dados Q , y_c e Z , e indica que este problema só pode ser resolvido por tentativas.

Utilizando-se da equação da energia específica e da geometria do canal, chega-se a uma equação completa do 3.º grau, em b , na forma:

$$b^3 + 3ZY_cb^2 + \left(3Z^2y_c^2 - \frac{Q^2}{gy_c^3} \right) b + \left(Z^3y_c^3 - \frac{2ZQ^2}{9y_c^2} \right) = 0 \quad (20)$$

Esta equação, após um laborioso desenvolvimento algébrico, foi resolvida em termos adimensionais, cuja solução é:

$$\Psi = -1 + \sqrt{\frac{4\lambda^2}{3}} \cos(\Theta/3); \text{ com } \Theta = \arctg \left(\sqrt{\frac{4\lambda^2}{27} - 1} \right) \quad (21)$$

se $\lambda^2 \geq 27/4$

$$\Psi = -1 + \left(\frac{\lambda^2}{2} \right)^{1/3} \left[\left(1 + \sqrt{1 - \frac{4\lambda^2}{27}} \right)^{1/3} + \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4\lambda^2}{27}} \right)^{1/3} \right] \quad (22)$$

se $\lambda^2 < 27/4$

$$\text{onde: } \Psi = \frac{b}{ZY_c} \text{ e } \lambda = Z \frac{Q}{\sqrt{gy_c^3}}$$

Estas expressões tornam explícitas e imediata a determinação da largura de fundo da seção e foram colocadas em gráfico, Figura 2.

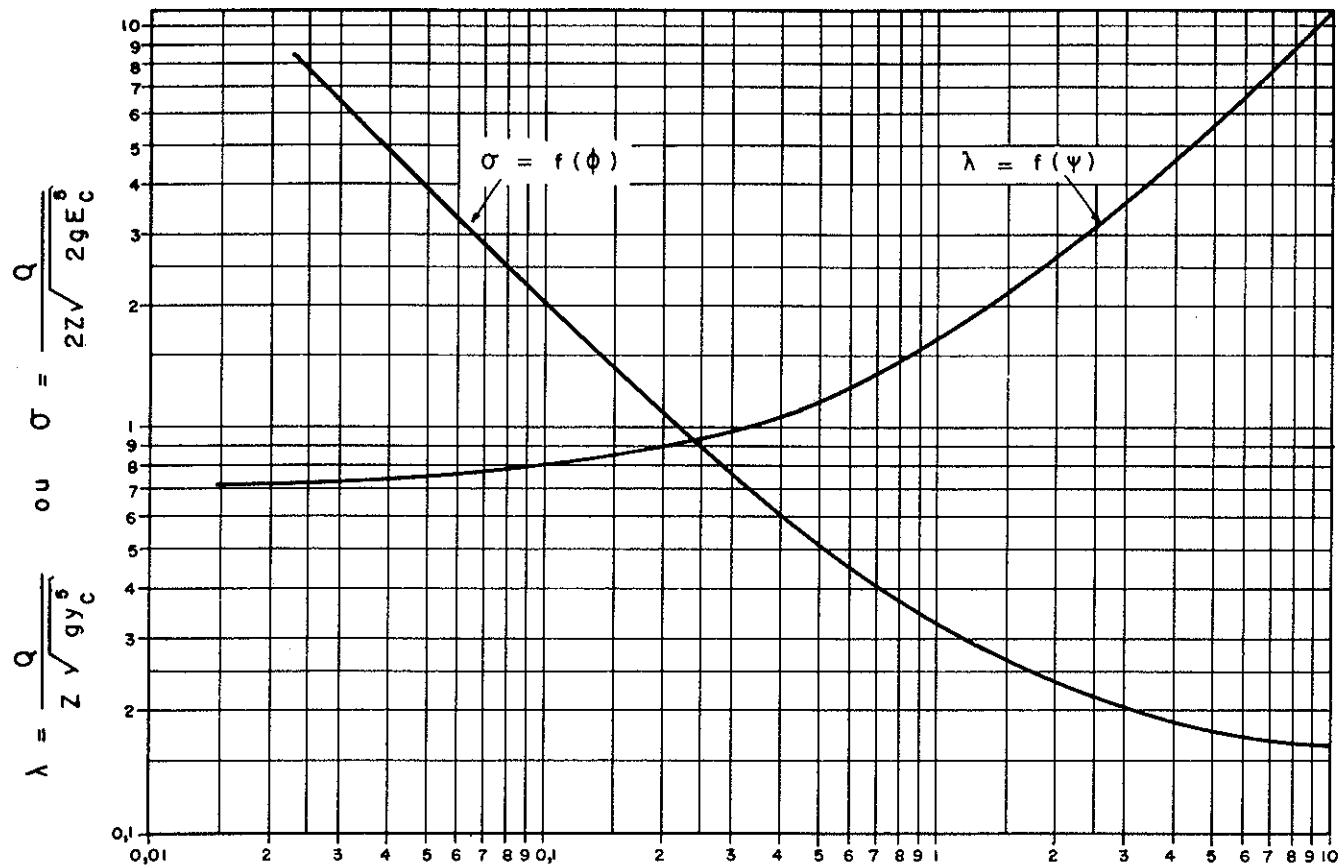


Figura 2 - Resolução dos problemas 3 e 4 $\Psi = \frac{b}{ZE_c}$ ou $\phi = \frac{ZE_c}{b}$

2.4 Problema 4

Determinar a vazão Q , conhecendo-se, Z , E_c e b .

Este problema pode ser resolvido, primeiro determinando-se μ pela resolução da equação do 2.º grau proveniente de (15) e em seguida usando-se o gráfico $\mu = f(\sigma)$ da Figura 1 para se calcular Q .

Com a finalidade de se evitar a resolução da equação do 2.º grau, pode-se fundir as equações (15) e (19) arbitrando-se valores para μ e determinando-se, simultaneamente, ϕ e σ que podem ser levados a um gráfico como na Figura 2.

Desta forma o cálculo da vazão Q , dados Z , E_c e b é imediato.

3 APLICAÇÃO (1)

Um lago descarrega $57 \text{ m}^3/\text{s}$ de água em um canal de forte declividade, de seção trapezoidal com inclinação dos taludes $2H:1v$.

O fundo do canal na seção de saída do lago está a $2,40 \text{ m}$ abaixo do nível d'água deste. Desprezando a velocidade de aproximação e a perda decarga, calcule a altura crítica e a largura de fundo.

Desprezando a carga cinética e a perda de carga na entrada, a energia disponível é a diferença entre o N.A. do lago e o fundo do canal, como este é de forte declividade esta energia é igual a energia crítica, estabelecendo-se escoamento crítico na entrada do canal.

Assim, para:

$$Q = 57 \text{ m}^3/\text{s}, E_c = 2,40 \text{ m e } Z = 2, \text{ tem-se no gráfico da Figura 1}$$

$$\sigma = \frac{Q}{2Z\sqrt{2gE_c^3}} = \frac{57}{2,2\sqrt{19,6 \cdot 2,40^3}} = 0,361 \rightarrow \mu = 0,735$$

$$\text{Como } \mu = y_c/E_c \therefore 0,735 = y_c/2,40 \rightarrow y_c = 1,764 \text{ m}$$

$$\text{Como } \phi = ZE_c/b = \frac{3 - 2/\mu}{4 - 5\mu} = \frac{3 - 2/0,735}{4 - 5 \cdot 0,735} = 0,858$$

$$\text{Portanto } b = \frac{2,2 \cdot 40}{0,858} = 5,60 \text{ m}$$

4 CONCLUSÕES

O desenvolvimento de equações explícitas, permite a elaboração de gráficos de fácil uso, pois uma única curva, em cada caso, resolve o problema, sem necessidade de se lançar mão de famílias de curvas.

As curvas são adimensionais podendo ser utilizadas em qualquer sistema compatível de unidades.

Embora o propósito básico tenha sido subsidiar a disciplina Hidráulica, facilitando exercícios normalmente resolvidos por tentativas, os gráficos são bastante precisos para serem utilizados com finalidades de projeto.

As faixas de variações dos parâmetros adimensionais cobrem perfeitamente as necessidades para a determinação dos elementos do escoamento crítico, nos casos mais comuns.

Os canais retangulares não podem ser tratados como caso particular dos trapezoidais, nestes gráficos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. HENDERSON, F.M. *Open Channel Flow*. New York, The Macmillan Co. 1966. 522 p.
2. PORTO, R.M. *Escoamento com Superfície Livre - Regime Permanente*. São Carlos, UFSCar. 1983. 113 p.