

# O PROCESSO DE VISUALIZAÇÃO NO CURSO DE INTRODUÇÃO ÀS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Sueli Liberatti Javaroni<sup>a</sup>

## RESUMO

Este artigo realça a importância do processo de visualização na investigação de modelos matemáticos num curso introdutório de equações diferenciais ordinárias (EDO), com ênfase na abordagem geométrica das soluções, auxiliada pelas tecnologias de informação e comunicação (TIC). Apresenta-se um curso de extensão universitária que foi o cenário de investigação para uma proposta pedagógica de introdução ao estudo de EDO. Este estudo foi desenvolvido utilizando-se da abordagem qualitativa, que enfatiza o estudo de aplicações e dos campos de direções de modelos matemáticos. Analisando os processos de discussão dos alunos durante o desenvolvimento das atividades, pôde-se concluir que a sua produção matemática foi condicionada pelos *softwares* que foram utilizados.

*Palavras-chave:* Ensino de EDO. Abordagem qualitativa. Visualização. Modelos matemáticos.

## ABSTRACT

This paper stresses the importance of the process of visualization in the investigation of mathematical models in an introductory course of ordinary differential equations (ODE) with emphasis in the geometric approach of the solutions, assisted by the technologies of information and communication (TIC). A university course of extension is presented. It was the background for the investigation of a pedagogical proposal of introduction to the ODE study. This study was developed using the qualitative approach that emphasizes the study of applications and the fields of directions of mathematical models. Analyzing the processes of discussion among students, during the development of the activities, it comes to a conclusion that the mathematical production of the students was related to the software that they used.

*Key words:* Teaching of ODE. Qualitative approach. Visualization. Mathematical models.

---

<sup>a</sup> Professora Assistente, Doutora do Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências, UNESP, Bauru, Av. Eng. Luiz E. C. Coube, 14-01, Vargem Limpa, Bauru - SP, CEP 17033-360. Fone: 14 31036086, fax: 14 3103606. E-mail: suelij@fc.unesp.br

## INTRODUÇÃO

Um modelo matemático de um fenômeno ou de uma situação é um conjunto de símbolos e relações matemáticas que o representam. Assim, “modelagem matemática” pode ser definida como o processo dinâmico utilizado para a elaboração e validação de modelos matemáticos e tem como um dos seus objetivos principais a possibilidade de previsão de tendências acerca do fenômeno estudado.

A importância de um modelo matemático está na possibilidade de expressar as características do fenômeno estudado, e vice-versa, isto é, o problema em questão é descrito por meio do modelo, o qual é analisado com as teorias e técnicas próprias da matemática. Geram-se, assim, informações e resultados acerca do fenômeno e, em seguida, apresentam-se os resultados obtidos utilizando-se da linguagem original do problema.

Vários dos princípios, ou leis, que descrevem o comportamento do mundo físico são proporções, ou relações, envolvendo a taxa segundo a qual determinados fenômenos acontecem. Ao modelar esses fenômenos, frequentemente se obtêm equações que envolvem as variações das quantidades (variáveis) presentes e consideradas essenciais na situação analisada. Assim, as leis que descrevem tal fenômeno podem ser representadas por equações de variações. Quando essas variações são instantâneas e o fenômeno se desenvolve continuamente, as equações são denominadas “equações diferenciais”.

Machado (1988, p. 153) afirma:

De maneira geral, uma *equação diferencial* é uma pergunta do tipo: “Qual a função cuja derivada satisfaz a seguinte relação?” Ou seja, uma equação diferencial é uma equação (no sentido de igualdade envolvendo uma incógnita) onde a incógnita é uma função, sendo que as informações disponíveis para a determinação da função desconhecida envolvem sua derivada.

Quando determinamos a solução de uma dada equação, procuramos identificar um ou mais valores reais que satisfaçam essa equação. Porém, quando queremos “resolver” uma EDO, estamos “construindo” uma função que venha a satisfazer essa equação diferencial.

Tendo um problema qualquer para resolver, elaboramos um modelo que se aproxime o melhor possível da situação analisada e aplicamos técnicas de resolução algébrica ou numérica; determinamos e interpretamos a solução com rela-

ção ao problema analisado e ajustamos o modelo, caso necessário. Esse processo é chamado de “modelagem matemática”. No entanto, ao partir de modelos matemáticos que atendam a situações ditas “reais”, aplicando técnicas algébricas ou numéricas de resolução para determinar sua solução, o que estamos fazendo é chamado de “aplicação” (APPICATION, 2003).

É nessa perspectiva que se encontra o trabalho relatado. As atividades desenvolvidas com os alunos participantes da pesquisa envolveram o conceito de aplicação dos conceitos “modelagem matemática” e “aplicação” (APPICATION, 2003).

## PESPECTIVAS TEÓRICAS

Vivemos um profundo e acelerado processo de mudanças e transformações que têm desafiado as formas de pensar e agir em todas as áreas da atividade humana.

Novas maneiras de pensar e de conviver estão sendo elaboradas no mundo das telecomunicações e da informática. As relações entre os homens, o trabalho, a própria inteligência dependem, na verdade, da metamorfose incessante de dispositivos informacionais de todos os tipos. Escrita, leitura, visão audição, criação, aprendizagem são capturados por uma informática cada vez mais avançada. Não se pode mais conceber a pesquisa científica sem uma aparelhagem complexa que redistribui as antigas divisões entre experiência e teoria. Emerge, neste final de século XX, um conhecimento por simulação que os epistemologistas ainda não inventariaram (LÉVY, 1993, p. 7).

Uma tecnologia da inteligência pode ser tudo aquilo de que lançamos mão (conscientemente ou não) na nossa comunicação, na elaboração do pensamento, na criação de conhecimentos, e que, além de nossos sentimentos e afetos, suporta a nossa inteligência: são as linguagens, os sistemas de signos, os recursos lógicos, os instrumentos dos quais nos servimos.

AS TIC fazem parte de nossas vidas, de nossa história e de nossa constituição. Borba e Villarreal (2005) afirmam que nós, seres humanos, não pensamos sozinhos, pois nosso desenvolvimento cognitivo é condicionado pelas mídias ou tecnologias da inteligência (oralidade, escrita e informática). Assim, a inteligência ou cognição são frutos dessa coletividade, não apenas como uma justaposição ou um agrupamento entre humanos e técnicas, mas como uma interação entre humanos e as tecnologias da inteligência. O nos-

so funcionamento intelectual é induzido pelas diferentes línguas e linguagens, sistemas lógicos e de signos que vieram se desenvolvendo com as comunidades que nos precederam. Essas comunidades são, de certo modo, partícipes de nosso pensamento. Elas “pensam em nós” e nós fazemos parte deste universo complexo produzido por elas e, ao mesmo tempo, contribuimos para a continuidade de seu desenvolvimento. A transformação não se dá apenas na transmissão da mensagem, mas também na recepção e interpretação que cada um dará através da mobilidade das relações de sentido.

Segundo Lévy (1993, p. 152):

Diversos trabalhos desenvolvidos em psicologia cognitiva a partir dos anos sessenta mostraram que a dedução ou indução formal está longe de ser praticada espontaneamente e corretamente por sujeitos reduzidos apenas aos recursos de seus sistemas nervosos (sem papel, nem lápis, nem possibilidade de discussão coletiva). É possível que não exista nenhuma faculdade particular do espírito humano que possamos identificar como sendo a “razão”. Como alguns humanos conseguiriam, apesar de tudo, desenvolver alguns raciocínios abstratos, podemos sem dúvida explicar este sucesso fazendo apelo a recursos cognitivos exteriores ao sistema nervoso. Levar em conta as tecnologias intelectuais permite compreender como os poderes de abstração e raciocínio formal desenvolveram-se em nossa espécie. A razão não seria um atributo essencial e imutável da alma humana, mas sim um efeito ecológico, que repousa sobre o uso de tecnologias intelectuais variáveis no espaço e historicamente datadas.

As técnicas de comunicação ilustram a divisão das culturas em cada tempo, classificadas como oralidade primária e a escrita. Uma das principais diferenças entre os indivíduos da cultura oral e da cultura escrita é que os primeiros caracterizavam-se pela memória viva por meio de relatos, da narrativa, de mitos, ao passo que o outro grupo objetiva a memória por meio dos escritos. Na oralidade primária, a memória social era transmitida pelas histórias dos mais velhos aos mais novos e pelos mitos. Com o advento da imprensa, foi aberto um espaço para uma série de descobertas, instaurando um novo modelo cognitivo. Textos e números puderam ser comparados e compilados, levando à chamada explosão do saber da época da Renascença.

A técnica aparece novamente como agente de transformação por meio da informática, presente em diversos setores da atividade humana e causando impactos na organização social. O

computador permite a velocidade na comunicação, a simulação (por meio da mostração visual) e a não-linearidade do texto (hipertexto).

De acordo com Borba e Penteado (2001, p. 46):

Ela [informática] é uma nova extensão de memória, com diferenças qualitativas em relação às outras tecnologias da inteligência e permite que a linearidade de raciocínios seja desafiada por modos de pensar, baseados na simulação, na experimentação, e em uma “nova linguagem” que envolve escrita, oralidade, imagens e comunicação instantânea. Neste contexto a metáfora da linearidade vem sendo substituída pela da descontinuidade e pelos dos links que são feitos por cada um que acessa uma dada homepage, ou um dado menu de um software mais tradicional, tal qual aqueles ligados a um conteúdo como geometria ou funções.

Na era da escrita, o livro e a teoria permaneciam no horizonte do conhecimento. Por trás da prática crítica, havia ainda uma estabilidade e unicidade entre a teoria e a explicação correta. Hoje, as teorias, com suas verdades e com a atividade crítica, cedem lugar aos modelos, com suas normas de eficiência e o julgamento de pertinência que preside sua avaliação. Estes modelos não se encontram escritos no papel, mas, sim, rodando num computador, continuamente corrigidos e aperfeiçoados ao longo das simulações. Este modelo, denominado por Lévy (1993) de “modelo digital”, em geral, não é lido ou interpretado como um texto, mas explorado de forma interativa.

Sobre esse aspecto podemos pensar nas planilhas eletrônicas como instrumentos de simulação contábil e orçamentária nos escritórios, programas de projeto auxiliado por computador (CAD) como instrumentos de simulação na engenharia e programas de auxílio à tomada de decisão de um empresário na simulação de efeitos de escolhas no meio financeiro.

No caso específico da educação matemática, podemos citar *softwares* de construções gráficas, destacados por Lourenço (2002), tais como Slogow, Geometricks, Geometer Sketchpad e o Cabri Géomètre, como simuladores para o ensino de geometria. Estes programas, entre outros, podem ser considerados como simuladores de capacidades cognitivas humanas como a visão, a audição e o raciocínio.

Podemos dizer que a escrita estende as capacidades da memória, razão por que pode ser considerada como uma tecnologia intelectual (Lévy, 1993). Já a simulação e visualização propiciada pela informática, além de estenderem a memória

de trabalho, funcionam como um módulo externo e suplementar para a faculdade de imaginar.

### A DISCIPLINA DE EDO

Em cursos como biologia, física, ecologia e engenharias, o conteúdo de EDO pode ser ministrado como sequência do tópico “métodos de integração”, ou, ainda, pode ser ministrado numa disciplina específica de equações diferenciais. De maneira geral, o ensino desta disciplina nos cursos de graduação se dá pela apresentação dos vários métodos de resolução de tipos de equações diferenciais integráveis, com a aplicação de listas de exercícios, as quais podem ser resolvidas pelos métodos apresentados, tornando-o assim um ensino instrumental (MORENO; AZCÁRATE GIMÉNEZ, 2003).

Segundo Moreno e Azcárate Gimenez (2003), pouco se tem trabalhado com o ensino de modelagem e de aplicações, fato que se deve, basicamente a dois motivos principais. O primeiro está na dificuldade conceitual da modelagem e na necessidade de conhecimentos matemáticos, os quais os alunos não possuem, fato que, em muitas situações, leva os professores a se acomodarem com o ensino mecânico e instrumental de métodos de resolução de equações diferenciais. O segundo motivo, segundo os pesquisadores, consiste na concepção pessoal do professor a respeito da matemática aplicada e sua posição no âmbito da matemática. Alguns professores estabelecem uma clara linha divisória entre a matemática pura – “matemática de verdade” –, tradicional e “de toda vida” (grifo do autor) e os conteúdos e técnicas próprias da matemática aplicada, dando primazia à matemática pura em relação à matemática aplicada.

Assim, nessa abordagem que privilegia os aspectos algébricos, a ênfase da disciplina consiste na determinação da solução analítica, o que muitas vezes minimiza o processo de modelagem matemática, bem como a interpretação e o comportamento da solução do modelo analisado.

Em vista disso, pode-se agregar ao ensino de EDO a abordagem qualitativa. A expressão “abordagem qualitativa”, aqui utilizada, consiste no processo de inferir sobre o comportamento das soluções de uma equação diferencial ordinária por meio das interpretações geométricas destas, obtidas através dos campos de direções, sem, necessariamente, encontrá-las.

### CAMPOS DE DIREÇÕES

Uma EDO de primeira ordem define, explicita ou implicitamente, uma função diferenciável  $f : D \rightarrow \Re$ , onde  $D$  é um subconjunto de  $\Re^2$ . Recordemos o cálculo de que, se  $y = y(x)$  é uma função derivável em um intervalo aberto  $I = (a, b)$  e seja  $x_0 \in I$ , então  $y'(x_0)$  nos dá a inclinação da reta tangente  $t$  ao gráfico de  $y = y(x)$ , no ponto  $(x_0, y(x_0))$  (Fig. 1).

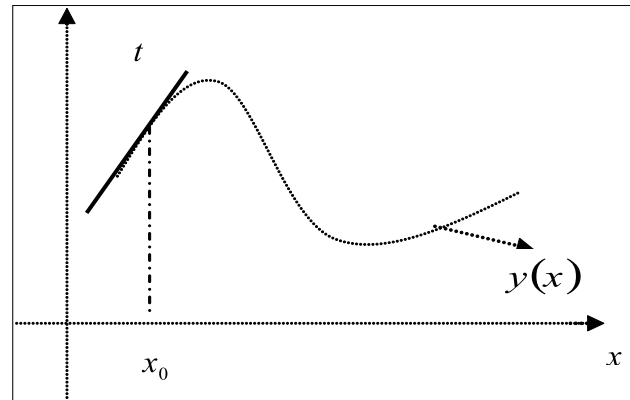


Figura 1 - Gráfico da função  $y(x)$  e da reta tangente  $t$

Portanto, se  $y = y(x)$  é solução de  $y' = f(x, y)$  definida em um intervalo aberto  $I = (a, b)$ , essa equação diferencial fornece a inclinação da reta tangente ao gráfico de  $y(x)$ , para todo  $x \in I$ . Mas se não conhecemos  $y = y(x)$ , solução da equação diferencial?

Neste caso podemos construir um diagrama que nos auxilie a esboçar o comportamento das soluções  $y = y(x)$  de  $y' = f(x, y)$  (caso existam), levando-se em consideração que o gráfico de  $y(x)$ , que passa pelo ponto  $P_0 = (x_0, y_0)$ , tem reta tangente neste ponto com inclinação  $y'_0(x_0) = f(x_0, y_0)$ .

O campo de direções da equação diferencial é um gráfico da função  $f$  no seguinte sentido: para cada ponto  $P = (x, y)$  do domínio,  $f$  define uma direção de qualquer solução  $y$  que passe pelo ponto  $P = (x, y)$ . Essa direção é representada por um pequeno segmento de reta cujo coeficiente angular é o valor da função  $f$  naquele ponto  $P = (x, y)$  e cuja origem do segmento é o ponto

$P = (x, y)$ . Um campo de direções, desenhado para muitos pontos do plano, fornece uma boa ideia do comportamento global das soluções de uma equação diferencial. Dessa forma, cada segmento de reta é tangente ao gráfico de uma solução da equação diferencial ordinária que contém aquele ponto.

## UM ENSAIO: INTRODUÇÃO ÀS EDO COM TIC

Um curso de extensão universitária foi oferecido aos alunos do curso de Matemática.<sup>1</sup> O curso, com a duração de 36 horas, teve por objetivo analisar os modelos de crescimento populacional de Malthus, de crescimento populacional de Verhulst e da lei aquecimento/resfriamento, através da abordagem qualitativa das equações diferenciais ordinárias (JAVARONI, 2007).

Para a exploração desses modelos atividades foram propostas utilizando os *softwares* Winplot, Maple, um applet e a planilha de cálculo Excel, além de lápis e papel. Muitas vezes, numa mesma atividade os alunos foram levados a utilizar as várias mídias, coordená-las no sentido de analisar o que encontraram em cada uma das situações e confrontá-las.

Dos nove alunos participantes, oito eram alunos do curso de licenciatura em Matemática e um fazia o curso de bacharelado em Matemática. Eles trabalharam durante todo o curso em pequenos grupos. Esses alunos já haviam cursado, pelo menos uma vez, a disciplina Cálculo Diferencial e Integral de funções de uma variável real, único pré-requisito exigido para a aceitação no curso.

Com relação aos procedimentos de registros dos dados, foi utilizado durante as aulas do curso o *software* Camtasia,<sup>2</sup> o qual possibilita a captura das imagens da tela do computador, das imagens dos alunos trabalhando no computador, via webcam, bem como de suas falas nas discussões durante as atividades.

Os vários *softwares* foram integrados no desenvolvimento das atividades efetuadas pelos alunos participantes. O processo de visualização foi um dos aspectos importantes na análise qualitativa dos modelos matemáticos clássicos e das equações diferenciais ordinárias analisadas. Esse processo é bastante privilegiado no ambiente de investigação propiciado pela inserção das

mídias informáticas, induzindo às discussões sobre as soluções entre os participantes do grupo.

Um dos temas que surgiram na análise dos dados é o que se refere à supremacia do aspecto algébrico ao geométrico observado nas discussões de algumas das duplas de alunos em determinado episódio. Tal fato pode ter origem em experiências relacionadas com a mídia “lápiz e papel” e com o formalismo do tratamento matemático, frequentemente empregados nos processos de ensino e aprendizagem da matemática, de forma geral, em toda a graduação. Outra característica presente em alguns dos episódios analisados é a elaboração de conjecturas pelos alunos nas discussões das atividades. No decorrer da discussão, por vezes suas conjecturas são refutadas; outras vezes, confirmadas. Em muitas situações das discussões das atividades os alunos foram levados a utilizar, numa mesma atividade, “lápiz e papel”, a planilha eletrônica e os *softwares* Winplot e Maple para explicar o que estavam observando ou para confrontar suas expectativas.

Uma característica presente em vários momentos dos episódios analisados é a não-linearidade de raciocínio dos alunos na resolução das atividades propostas. Em vários momentos, uma determinada questão da atividade conduz a que os alunos estabeleçam relações com outros conceitos que não fazem, necessariamente, parte do assunto ali colocado. A noção de rede de significados apresenta-se apropriada para analisar esse fato.

Dessa forma, os temas que emergiram dos dados coletados neste primeiro ensaio de um curso introdutório à EDO podem assim ser resumidos: processo de visualização em atividades investigativas auxiliadas pelas mídias informáticas; abordagens geométrica e algébrica com as mídias informáticas; conhecimento como rede de significados.

Neste trabalho mostraremos a importância do processo de visualização nas atividades de investigação auxiliadas pelas TIC.

## VISUALIZAÇÃO

Arcavi (2003) afirma que a visão é um sentido central em nosso ser biológico e sociocultural e nossa mais importante fonte de informação sobre o mundo.

Vivemos num mundo onde a informação é, principalmente, transmitida por meio de invólucros visuais e as tecnologias incentivam essa

comunicação essencialmente visual. Consequentemente, como seres biológicos e socioculturais, somos incentivados e instigados a observar não somente o que está em nosso campo de visão, mas também a inferir sobre o que não somos capazes de “ver”, ou seja, a visualização oferece um método de ver o despercebido.

Dessa forma, a visualização pode ser caracterizada como um objeto, uma imagem e também como um processo, uma atividade (BISHOP, 1989, p. 7). A visualização no ensino da matemática tem sido considerada como uma componente chave do raciocínio na resolução de problemas, não somente relacionada às finalidades ilustrativas.

De acordo com Arcavi (2003),

visualização é a habilidade, o processo e o produto de criação, interpretação e o uso da reflexão sobre retratos, imagens, diagramas, em nossas mentes ou no papel ou com ferramentas tecnológicas, com a finalidade de descrever e comunicar a informação, de pensar sobre e de desenvolver idéias previamente desconhecidas e avançar no entendimento.

A elaboração de gráficos no tratamento de dados torna-se interessante na medida em que ao analisá-los podemos observar características gerais e particulares desses dados. Podemos afirmar, então, que a elaboração de gráficos para investigar os dados tem a finalidade de instigar a “revelação” de características importantes destes.

A importância da visualização pode ser também analisada com relação aos aspectos simbólicos. Pesquisadores da área de matemática afirmam que “veem” por meio das formas simbólicas, independentemente da sua complexidade. Para outros, certamente para os estudantes de matemática, a visualização pode ter um papel poderoso, complementar em três aspectos: visualização como (a) suporte e ilustração de resultados essencialmente simbólicos, (b) um caminho possível de resolver conflitos entre soluções simbólicas e intuições e (c) como uma maneira de ajudar a conectar com e recuperar os conceitos básicos, os quais podem ser facilmente encaminhados por soluções formais (ARCAVI, 2003).

## A VISUALIZAÇÃO E AS ATIVIDADES

Na atividade da lei do resfriamento os alunos investigaram o comportamento da variação da temperatura de um líquido ao longo do tempo. Os valores da temperatura foram coletados em

dois experimentos distintos, isto é, a quantidade do líquido não era a mesma e a tomada da medida foi realizada em dois dias. Os dados dos dois experimentos foram apresentados na forma tabelar e era solicitada aos alunos a elaboração de um modelo matemático que aproximava esses valores para os dois experimentos. Os alunos utilizaram a planilha de cálculo, esboçaram o diagrama de dispersão e, ao analisarem o gráfico obtido, buscavam descobrir o comportamento da temperatura. Na Figura 2 podemos observar Adriano e Viviane utilizando a planilha eletrônica para ajustar os valores dados. Nesta atividade, a organização dos pontos, elaborada no diagrama de dispersão, auxiliou-os na busca do modelo matemático procurado.



Figura 2 - Adriano e Viviane ajustando os dados da temperatura

Na atividade denominada “campos de direções” eram dados aos alunos cinco equações diferenciais ordinárias e cinco esboços de campos de direções, sendo-lhes solicitado que estabelecessem a correspondência entre os gráficos e as equações, sem determinar algebricamente as soluções. Essa exploração buscava analisar se o conceito de campos de direções estava claro para os alunos. Quando analisaram os gráficos dos campos diretores dos vários modelos, eles buscaram “ver” a solução procurada. Uma primeira conclusão que se pôde verificar é que o entendimento da derivada como variação de uma curva é central na interpretação desses gráficos, bem como o comportamento das soluções ao longo do tempo e a existência de um estado de equilíbrio.

Na atividade denominada “modelo populacional de Verhurst” os alunos estudavam um modelo matemático que descreve o crescimento populacional de uma determinada espécie. A

equação analisada era dada por  $\frac{dp}{dt} = 0,5(1 - p/k)p$ , onde  $p$  representa a população no instante  $t$ . Uma das tarefas solicitadas era que eles determinassem as soluções de equilíbrio dessa EDO. A “confusão” inicial dos alunos estava na busca dessas soluções, já que, por definição, solução constante de uma EDO são as funções tais que  $\frac{dp}{dt} = 0$  e, segundo eles, toda função constante tem derivada nula; portanto, toda função constante seria solução da EDO. Adriano e Ronaldo esboçaram, utilizando-se dos comandos do Maple, o gráfico do campo de direções para essa equação. (Fig. 3).

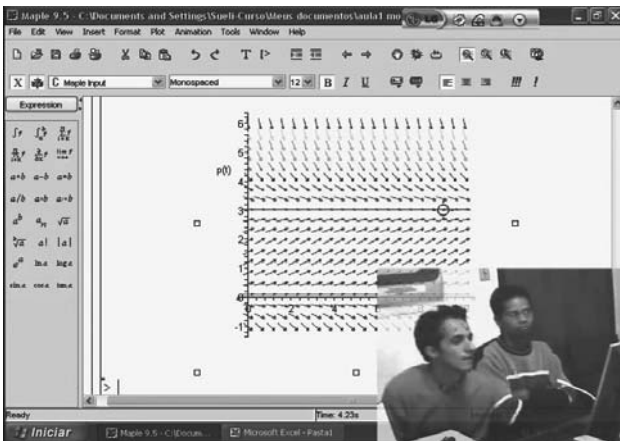


Figura 3 - Ronaldo e Adriano analisando o campo de direções de  $\frac{dp}{dt} = 0,5(1 - p/k)p$

Assim, os alunos simularam os campos de direções, variando  $k$ , e analisaram o comportamento dos vetores diretores para cada caso. Na sequência, concluíram sobre as soluções constantes do modelo, como podemos observar pelas falas de Ronaldo e Adriano.

Ronaldo: Ah, ah!!! Tá aí. Olha lá onde constante.

Adriano: Ele vai ser constante em três. (Nesse momento eles haviam esboçado o gráfico para  $k = 3$ ).

Com a análise do esboço gerado pelo *software* eles viram o que era despercebido. Essa análise os ajudou a reorganizar o conceito de solução constante do modelo estudado, conforme observamos na fala dos alunos:

Ronaldo: Como nós não achamos isso, cara? Aqui também óh... (Ele apontou com o mouse para o eixo das abscissas).

Adriano: Aliás, ele vai ter vários constantes, em zero...

Já na atividade denominada “objeto em queda”, os alunos Marcos e Shen tinham por objetivo investigar o comportamento de um modelo para a situação de um objeto em queda na atmosfera da Terra, próximo ao nível do mar. Considerando a hipótese de que a força do ar sobre esse objeto é proporcional à sua velocidade de queda, um modelo matemático que representa essa situação é dado por  $m \frac{dv}{dt} = mg - \gamma v$ , onde  $v(t)$  é a função velocidade que varia com relação ao tempo  $t$ ,  $m$  é a massa do objeto,  $g$  é a aceleração da gravidade e o parâmetro  $\gamma > 0$  é chamado “coeficiente da resistência do ar”. Para exploração do modelo foram sugeridos os valores  $m = 10 \text{ Kg}$ ,  $\gamma = 2 \text{ Kg/s}$ , e  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ . Assim, analisaram a equação  $\frac{dv}{dt} = 9,8 - \frac{v}{5}$ .

Marcos e Shen, inicialmente, acreditavam que o comportamento da velocidade do objeto seria descrito por uma parábola, pois eles se lembravam de algo que tinham estudado anteriormente na disciplina de física. Ao esboçarem o campo de direções para essa equação, inicialmente “a mão”, obtiveram o esboço mostrado na Figura 4.

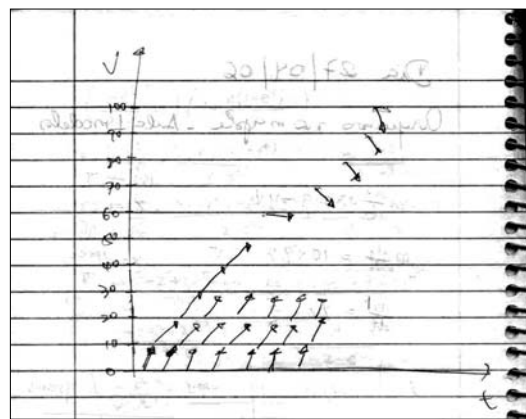


Figura 4 – Campo de direções esboçado no caderno por Marcos e Shen

Esse esboço mostrava que eles estavam conjecturando que a velocidade seria descrita por uma parábola. A autora sugeriu então, na sequência da atividade, que utilizassem o Winplot para desenhar o campo de direções. Assim, obtiveram o gráfico ilustrado na Figura 5.

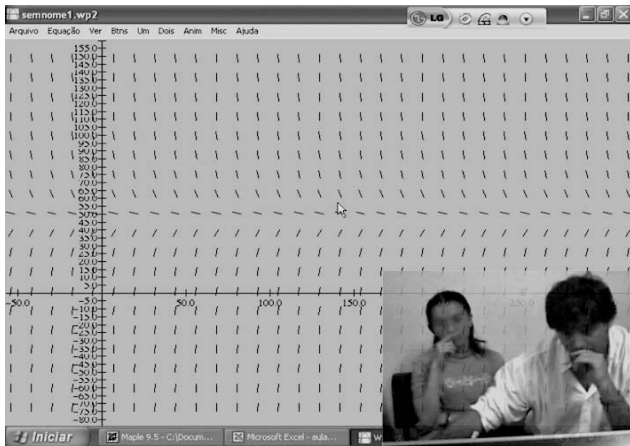


Figura 5 – Esboço do campo feito no Winplot

O trecho a seguir ilustra a discussão dos alunos com a autora acerca do modelo a partir desse esboço.

Sueli: Esse comportamento está parecido com o que vocês estavam fazendo aqui? Se você fosse desenhar com o mouse uma curva que sai do ponto  $(0,0)$ , ou seja, se eu soltar um objeto com velocidade inicial zero, o que acontece com a velocidade dele?

Marcos: Aumenta.

Sueli: Aumenta sempre? Segundo as condições que assumimos aí, ela vai aumentar sempre?

Shen: Não.

Marcos: Até aquela força que a resistência do ar conseguir anular, não é? Porque ela é em função da velocidade e a velocidade está aumentando.

Sueli: E se o peso dele fosse igual à resistência do ar, o que aconteceria com essa velocidade então?

Shen: Zero.

Marcos: Ficaria constante.

Sueli: Será que seria zero?

Marcos: Uma constante.

Sueli: Aí, então, digamos que você saísse com uma velocidade inicial de  $100\text{m/s}$ . Como seria uma curva que teria esse comportamento dos vetores? Será que a parábola?

Shen: Aqui assim. (Shen mostra com o mouse uma curva parecida com o gráfico de uma função exponencial assintótica).

Marcos: Vai dar In nesse treco aqui, logaritmo?

Marcos: Exponencial não pode ser.

Sueli: Por que não pode ser exponencial?

Marcos: E aqui? Isso é exponencial também?

Marcos: Quer dizer que isso ai vai dar uma coisa e elevado a ou a elevado a? É que nós estamos

viciados, o modelo que a gente está pensando é sem a resistência do ar, a gente está viciado lá na física, lá trás, por isso que nós estamos [...]. Eu já estava querendo ir com o gabarito na mão, por isso... (risos)

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Da análise dos dados coletados neste primeiro curso de EDO utilizando as TIC, pode-se afirmar que a visualização contribui nas discussões matemáticas dos alunos. Além disso, consiste em processos de várias naturezas, pois não somente organiza os dados em estruturas significativas, mas constitui um importante fator que guia o desenvolvimento analítico de uma solução.

No entanto, temos também de considerar as dificuldades impostas. Afinal, todos nós vemos igual? É atribuída a Goethe a frase “nós não sabemos o que vemos, nós vemos o que sabemos”. A segunda parte da frase “nós vemos o que sabemos” aplica-se para muitas situações nas quais os alunos não necessariamente veem o que professores e pesquisadores estão vendo.

Esse fato aconteceu em diversos momentos durante o curso. Por exemplo, quando solicitado aos alunos, no episódio da lei do resfriamento, que eles avaliassem se os modelos obtidos eram compatíveis, parece evidente, analisando as falas de Adriano e Viviane, que o que se questionava quanto à compatibilidade dos modelos não fazia parte do horizonte dos alunos.

Outra dificuldade acerca do processo de visualização surge da necessidade de transitar pelas representações visuais e analíticas de uma mesma situação. Esse é um dos processos centrais na compreensão da matemática. E aprender a compreender e ter habilidade na manipulação de múltiplas representações pode ser um processo demorado, tortuoso e não linear para os estudantes.

Esse foi um fato recorrente nos vários episódios. Podemos observar a importância do entendimento da equivalência entre as representações visuais e analíticas nas várias atividades analisadas: Marcos e Shen, na atividade do objeto em queda; Viviane e Adriano, na atividade “lei do resfriamento”; Ronaldo e Adriano, na atividade “modelo de Verhulst”.

A abordagem geométrica para analisar equações diferenciais pode encontrar nesse fato uma das dificuldades para seu sucesso. Entender o campo de direções, entender o que é resolver



uma EDO e relacionar esse entendimento com a busca da solução analítica é o maior desafio dessa abordagem.

## REFERÊNCIAS

APPLICATIONS and Modelling in Mathematics Education. *International Reviews on Mathematical Education*, v. 34, n. 5. Disponível em: <<http://subs.emis.de/journals/ZDM/zdm025i1.pdf>>. Acesso em: 22 out. 2007.

ARCAVI, A. The role of visual representations in the learning of mathematics. *Education Studies in Mathematics*, v. 52, n. 3, p. 215-241, 2003.

BISHOP, A. Review of research in visualization in mathematics education. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, v. 11, n. 1, p. 7-16, 1989.

BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. *Informática e educação matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2001. 104 p.

BORBA, M. C.; VILLARREAL, M. E. *Humans-With-Media and the reorganization of mathematical thinking: information and communication technologies, modeling, experimentation and visualization*. New York: USA, Springer, 2005. v. 39.

JAVARONI, S. L. *Abordagem geométrica: possibilidades para o ensino e aprendizagem de introdução às equações diferenciais ordinárias*. 231 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2007.

LÉVY, P. *As Tecnologias da inteligência: o futuro do pensamento na era da informática*. Trad. de C. I. da Costa. São Paulo: Editora 34, 1993.

LOURENÇO, M. L. A demonstração com informática aplicada à educação. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, Rio Claro, ano 15, n. 18, p. 100-111, 2002.

MACHADO, N. J. *Matemática por assunto: noções de cálculo*. São Paulo: Scipione, 1988.

MORENO, M.; AZCÁRATE GIMÉNEZ, C. Concepciones y creencias de los profesores universitarios de matemáticas acerca de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. *Enseñanza de Las Ciencias*, v. 21, n. 2, p. 265-280, 2003.

## NOTAS

- <sup>1</sup> Instituto de Geociências e Ciências Exatas (IGCE), Unesp, Campus de Rio Claro.
- <sup>2</sup> Desenvolvido e comercializado pela empresa TechSmith.

## DADOS BIOGRÁFICOS DA AUTORA



### Sueli Liberatti Javaroni

Educadora matemática, docente do Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade Estadual Paulista – Unesp, campus de Bauru. Membro do Grupo de Pesquisa em Informática, outras Mídias e

Educação Matemática (Gpimem).

Formação: bacharel em Matemática pelo ICMC-USP, mestra em Matemática pela UFS-Car e Doutora em Educação Matemática pela Unesp. E-mail: [suelilj@fc.unesp.br](mailto:suelilj@fc.unesp.br)