

O NÚMERO COMPLEXO E SEU USO NA ENGENHARIA ESTRUTURAL

Walnório Graça Ferreira,^a Rodrigo Silveira Camargo,^b Antônio Manoel Ferreira Frasson,^c Webe João Mansur,^d Ricardo Azoubel da Mota Silveira^e

RESUMO

O presente artigo tem o objetivo de propor aos professores dos cursos de engenharia civil e mecânica a apresentação pedagógica de números complexos aos seus alunos. Inicia-se com a história do número complexo, a origem da equação de Euler, e resolve-se a equação de movimento de um sistema massa-mola com um grau de liberdade, dotado de amortecimento viscoso, utilizando-se números complexos. Isso facilita a solução da equação de movimento, pois a equação diferencial se transforma numa equação algébrica. É uma abordagem didática, que visa despertar o interesse dos alunos de engenharia civil e mecânica pelos números complexos. Finalmente, aplica-se a presente formulação a um caso prático da engenharia estrutural.

Palavras-chave: Números complexos. Dinâmica estrutural. Ensino na engenharia.

ABSTRACT

The present article has the objective of proposing to professors of civil and mechanical engineering courses the pedagogical presentation of complex numbers to their students. It begins with the history of complex numbers, the origin of Euler's equation, and the equation of movement of a mass-spring system with one degree of freedom, with viscous damping, using complex numbers. This makes it easier to solve the equation of movement, because the differential equation is turned into an algebraic equation. It is a didactic approach, which aims to instigate the interest of civil and mechanical engineering students. Finally, the presented formulation is applied to a practical case of structural engineering.

Key words: Complex numbers. Structural dynamics. Teaching in engineering.

^a E-mail: walnorio@gmail.com

^b E-mail: rodrigo_camargo2000@yahoo.com

^c E-mail: frasson@ele.ufes.br

^d Universidade Federal do Espírito Santo – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil. Av. Fernando Ferrari, 514, Goiabeiras CEP 29075-910, Vitória - ES.

^e E-mail: webe@coc.ufrj.br. Universidade Federal do Rio de Janeiro – COPPE, Ilha do Fundão, Rio de Janeiro - RJ.

E-mail: ricardo@em.ufop.br. Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto - MG.

INTRODUÇÃO

Este artigo é uma proposta aos professores dos cursos de engenharia civil e mecânica para apresentarem os números complexos aos seus alunos por meio de uma abordagem pedagógica, envolvendo deduções, apresentações em coordenadas cartesianas e polares, ângulos de fase, transformada de Fourier contínua e discreta e aplicações práticas de engenharia.

Com a qualidade do aço e do concreto melhorando cada vez mais, torna-se vantajoso utilizar elementos estruturais mais esbeltos, vencendo vãos maiores, deixando as estruturas suscetíveis a vibrações oriundas da ação do vento e do movimento humano (o andar, o pular, o dançar). O cálculo da resposta ao carregamento dinâmico torna-se obrigatório devido ao conforto humano e à segurança, no caso de haver ressonância.

O número complexo é abordado extensivamente no curso de engenharia elétrica ao longo dos seus cinco anos, deixando os egressos com sólido conhecimento dos conceitos envolvidos e de sua aplicação na engenharia. Por outro lado, nos cursos de engenharia mecânica e civil o número complexo é apresentado rapidamente no curso de circuitos elétricos por um professor do curso de engenharia elétrica, portanto não familiarizado com aplicações práticas em estruturas. Para os estudantes desses cursos os conceitos fundamentais e definições de números complexos apresentam-se como algo extremamente difícil. Tais conceitos não despertam a sua atenção para a importância e uso em outros campos da engenharia. Mesmo no curso de engenharia mecânica, no âmbito das vibrações mecânicas, as equações de movimento são preferencialmente resolvidas no domínio do tempo. Utilizando-se o domínio da frequência, há uma simplificação e melhor entendimento dos resultados, já que a equação diferencial é facilmente transformada em equação algébrica. Quando há vários graus de liberdade, o conjunto de equações diferenciais passa a ser um sistema de equações lineares complexas.

Os autores sugerem a apresentação do conteúdo deste artigo na disciplina de vibrações do curso de engenharia mecânica e na disciplina de análise estrutural do curso de engenharia civil, tendo em vista a forma pedagógica como foi apresentado o tema, com histórico, com formulação didática e aplicação na solução de um real problema de engenharia.

HISTÓRICO

A referência mais antiga a raízes quadradas de números negativos talvez tenha ocorrido no trabalho do matemático grego e inventor Heron de Alexandria, no século 1 d.C., quando ele considerou volumes de troncos de pirâmide impossíveis. (BHATTI, 2007).

Números complexos entraram em maior evidência no século 16, quando fórmulas fechadas para as raízes de polinômios de terceiro e quarto grau foram descobertas por matemáticos italianos, como Niccolo Tartaglia e Gerolamo Cardano. (O'CONNOR; ROBERTSON, 2007). Rapidamente se percebeu que essas fórmulas, mesmo quando usadas para obter soluções reais, por vezes requeriam a manipulação de raízes quadradas de números negativos. Por exemplo, a fórmula cúbica de Tartaglia dá a seguinte solução para a equação $x^3 - x = 0$. (O'CONNOR; ROBERTSON, 2007).

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \left(\sqrt{-1}^{1/3} + \frac{1}{\sqrt{-1}^{1/3}} \right) \quad (1)$$

À primeira vista, isso parecia sem sentido por causa do termo $\sqrt{-1}^{1/3}$. Ou seja, para encontrar as raízes de $x^3 - x = 0$ seria necessário, primeiro, encontrar as raízes de $z^3 = i$, que são equivalentes a $\sqrt{-1}^{1/3}$. Entretanto, cálculos formais mostram que essas raízes (soluções da equação $z^3 = i$) são os complexos $-i$, $(i + \sqrt{3})/2$ e $(i - \sqrt{3})/2$, que, substituídas na solução de Tartaglia, resultam em 0, 1 e -1 , que são as soluções de $x^3 - x = 0$ e, curiosamente, não têm parte complexa.

Isso tudo não era completamente compreendido, uma vez que nem mesmo números negativos tinham sustentação sólida naquela época. O termo “imaginário” foi criado por René Descartes em 1637 e tinha a intenção de significar “derrogatório”. Uma outra fonte de confusão era a equação $\sqrt{-1}^2 = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = -1$, que na época, parecia inconsistente com a identidade algébrica $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$, que, como se sabe hoje, é válida para a e b reais positivos. O uso incorreto dessa equação é creditado até mesmo a Euler. Essa dificuldade levou à convenção de usar o símbolo especial i em lugar de $\sqrt{-1}$.

No século 18, Abraham de Moivre e Leonhard Euler desenvolveram seus trabalhos. A

De Moivre (1730) é atribuída a fórmula que leva seu nome, a fórmula de De Moivre (O'CONNOR; ROBERTSON, 2007):

$$(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^n = \cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta \quad (2)$$

e a Euler (1748), a fórmula de Euler (WEISSTEIN, 2007), da análise complexa:

$$\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta = e^{i\theta} \quad (3)$$

A existência de números complexos não foi completamente aceita até a interpretação geométrica ter sido descrita por Caspar Wessel. (O'CONNOR; ROBERTSON, 2007), em 1799. Esta foi redescoberta e popularizada muitos anos depois por Carl Friedrich Gauss e, graças a isso, a teoria dos números complexos recebeu uma notável expansão. Entre os que se aprofundaram na teoria moderna estão Möbius, Dirichlet, Klein, Weierstrass, Schwarz, Richard Dedekind e Henri Poincaré.

SÉRIE DE TAYLOR

A série de Taylor é, de forma simplificada, um tipo de soma infinita capaz de aproximar uma dada função $f(x)$ na vizinhança de um ponto $x = a$, definida por:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \quad (4)$$

Por exemplo, o desenvolvimento da série de Taylor das funções $f(x) = \operatorname{sen} x$ e $f(x) = \cos x$ na vizinhança de $a = 0$ é:

$$\operatorname{sen}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \dots \quad (5)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \dots \quad (6)$$

Na Figura 1 pode-se ver como a série de Taylor da função $f(x) = \operatorname{sen} x$ se torna cada vez mais próxima da função exata, conforme o número de termos é aumentado, tanto para o desenvolvimento na vizinhança do ponto (a) $a = 0$

quanto do ponto (b) $a = 7\pi/2$. Escolhe-se convenientemente o valor de a conforme o desenvolvimento da série que se deseja encontrar.

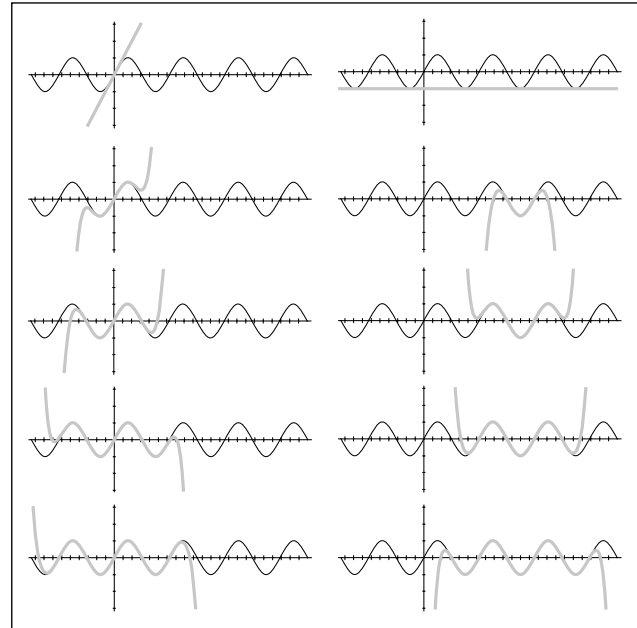


Figura 1 - Séries de Taylor para a função $f(x) = \operatorname{sen} x$ com, de cima para baixo, 2, 5, 10, 15 e 20 termos, na vizinhança de (a) $a = 0$ e (b) $a = 7\pi/2$.

EQUAÇÃO DE EULER

Podem-se usar séries de Taylor também para encontrar aproximações de funções que envolvem números complexos, lançando mão de suas propriedades. Uma vez que $i^{4n} = 1$, $i^{4n+1} = i$, $i^{4n+2} = -1$ e $i^{4n+3} = -i$, onde n é inteiro, temos que o desenvolvimento da função $f(x) = e^{ix}$ é:

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i \frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - i \frac{x^7}{7!} + \frac{x^8}{8!} + i \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{10}}{10!} - i \frac{x^{11}}{11!} + \dots \quad (7)$$

Analisando-se os termos com potências pares de x , vê-se que são os mesmos do desenvolvimento da Equação (6). Da mesma forma, os termos com potências ímpares de x são os mesmos da Equação (5), porém multiplicados por i . Portanto, a partir daí, somando-se as Equações (5) e (6) e trocando a variável x pela mais comumente usada θ , chega-se a:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta \quad (8)$$

A Equação (8) é a chamada *equação de Euler*.

Um número complexo pode ser escrito na forma retangular como $a + ib$ ou na forma polar como $Me^{i\theta}$. A relação entre as duas formas se dá pela relação de Euler (Eq. (8)), como a seguir:

$$Me^{i\theta} = M \cos \theta + iM \sin \theta = a + ib \quad (9)$$

logo,

$$a = M \cos \theta \quad (10)$$

e

$$b = M \sin \theta \quad (11)$$

elevando (10) e (11) ao quadrado e somando-os, obtém-se:

$$a^2 + b^2 = M^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = M^2 \quad (12)$$

donde:

$$M = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (13)$$

Dividindo-se (11) por (10), obtém-se:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{b}{a} \quad (14)$$

logo,

$$\theta = \operatorname{arctg} \left(\frac{b}{a} \right) \quad (15)$$

A representação no plano complexo está ilustrada na Figura 2. A multiplicação de um número complexo por $e^{i\theta}$ resulta numa rotação no plano complexo (Figura 2b), como é demonstrado a seguir:

$$(a + ib)e^{i\phi} = Me^{i\theta}e^{i\phi} = Me^{i(\theta+\phi)} \quad (16)$$

onde M e θ estão em (13) e (15), respectivamente.

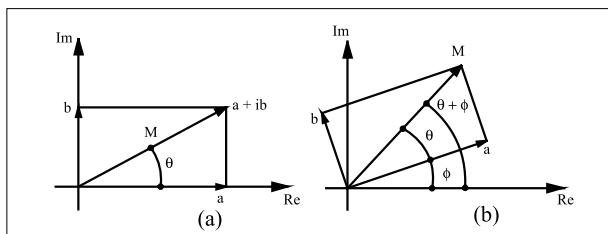


Figura 2 - Representação de (a) um número complexo no plano e (b) sua rotação no plano quando multiplicado por $e^{i\theta}$

RESPOSTA DE UM SISTEMA ESTRUTURAL A CARGA HARMÔNICA

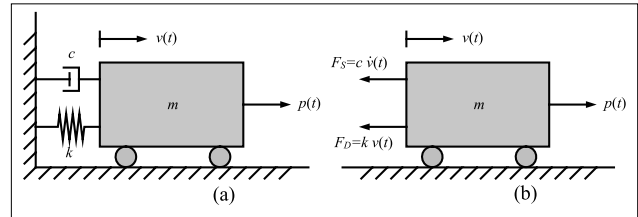


Figura 3 - Representação de um sistema massa-mola com amortecimento

Considera-se um sistema estrutural qualquer (tal como uma ponte, uma caixa d'água, ou um edifício) submetido a um carregamento dinâmico, ou seja, variável no tempo. O sistema pode ser representado por uma massa m , e a rigidez e o amortecimento da estrutura podem ser representados pela constante elástica k e pela constante de amortecimento viscoso c . Esse modelo está representado na Figura 3, onde se pode verificar, no diagrama de corpo livre do sistema, as forças que nele atuam. A partir da soma das forças que atuam no sistema, chega-se a:

$$m\ddot{v}(t) + c\dot{v}(t) + kv(t) = p(t) \quad (17)$$

onde $v(t)$ é a *resposta dinâmica* do sistema ao carregamento $p(t)$, ou seja, é a função que representa o deslocamento do sistema massa-mola que representa a estrutura, em função do tempo. Supondo-se que o carregamento $p(t)$ é *harmônico*, ou seja, tem variação cossenoidal, obtém-se:

$$p(t) = P_0 \cos(\omega t + \phi) \quad (18)$$

P_0 é a amplitude máxima da carga, ω é a frequência angular da carga e ϕ é o ângulo de fase da carga, que permite que a mesma inicie sua atuação com um valor diferente do seu valor máximo. Com o uso da identidade de Euler, obtém-se:

$$\begin{aligned} e^{i(\omega t + \phi)} &= \cos(\omega t + \phi) + i \operatorname{sen}(\omega t + \phi) \quad \text{e} \\ e^{-i(\omega t + \phi)} &= \cos(\omega t + \phi) - i \operatorname{sen}(\omega t + \phi) \end{aligned} \quad (19)$$

Essas equações, depois de multiplicadas por P_0 , somadas e rearrumadas, levam a:

$$p(t) = \frac{1}{2} \{ P_0 e^{i\varphi} e^{i\omega t} + P_0 e^{-i\varphi} e^{-i\omega t} \} \quad (20)$$

Definindo $P = P_0 e^{i\varphi}$ e seu conjugado complexo $P^* = P_0 e^{-i\varphi}$, tem-se, portanto:

$$p(t) = \frac{1}{2} \{ P e^{i\omega t} + P^* e^{-i\omega t} \} \quad (21)$$

Para uma carga variando de forma cosenoidal e sendo o sistema linear, a resposta $v(t)$ será também cosenoidal. Entretanto, a resposta não estará necessariamente em fase com o carregamento, devido à atuação do amortecimento sobre o sistema. Isso significa que, enquanto a carga atua na estrutura, seu deslocamento máximo não ocorre sincronizadamente com o valor máximo do carregamento, e sim, um pouco atrasado. Pode-se assumir, portanto, que a resposta tem a forma:

$$v(t) = V_0 \cos(\omega t + \theta) \quad (22)$$

onde V_0 é a amplitude máxima do deslocamento sofrido pelo sistema e θ é o ângulo de fase da resposta, o qual é diferente da fase do carregamento, que é φ . O objetivo é determinar a resposta do sistema, ou seja, determinar os valores de V_0 e θ .

Aplicando transformações análogas às aplicadas à carga, pode-se reescrever a resposta:

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{1}{2} \{ V_0 e^{i\theta} e^{i\omega t} + V_0 e^{-i\theta} e^{-i\omega t} \} = \\ &= \frac{1}{2} \{ V e^{i\omega t} + V^* e^{-i\omega t} \} \end{aligned} \quad (23)$$

onde se define $V = V_0 e^{i\theta}$ e seu conjugado complexo $V^* = V_0 e^{-i\theta}$.

Seja agora a tarefa de encontrar o valor de $v(t)$. Para isso, imagina-se, inicialmente, a primeira parcela da Equação (21) atuando como uma “carga complexa” no sistema, ou seja, $p_1(t) = P e^{i\omega t}$. Como o sistema é linear, fica claro que a resposta a essa carga será dada pela primeira parcela da Equação (23) e será da forma $v_1(t) = V e^{i\omega t}$. Sabendo-se que:

$$\dot{v}(t) = \frac{d}{dt} (V e^{i\omega t}) = i\omega V e^{i\omega t} \quad (24)$$

$$\ddot{v}(t) = \frac{d^2}{dt^2} (V e^{i\omega t}) = -\omega^2 V e^{i\omega t} \quad (25)$$

a substituição na Equação (17) resulta em:

$$-\omega^2 m V e^{i\omega t} + i\omega c V e^{i\omega t} + k V e^{i\omega t} = P e^{i\omega t} \quad (26)$$

ou:

$$(-\omega^2 m + i\omega c + k)V = P \quad (27)$$

que é uma equação algébrica. Assim:

$$V = \frac{P}{-\omega^2 m + i\omega c + k} \quad (28)$$

Agora deve-se lançar mão de um artifício que envolve a rotação de um vetor no plano complexo, com o uso da equação de Euler para simplificar o denominador $-\omega^2 m + i\omega c + k$. A Figura 4 (a) mostra o vetor correspondente a esse número complexo, no plano complexo. Pode-se afirmar que seu módulo é igual a:

$$\rho = \sqrt{(k - \omega^2 m)^2 + (\omega c)^2} \quad (29)$$

e que o ângulo que este faz com o eixo real é igual a:

$$\alpha = \arctan\left(\frac{\omega c}{k - \omega^2 m}\right) \quad (30)$$

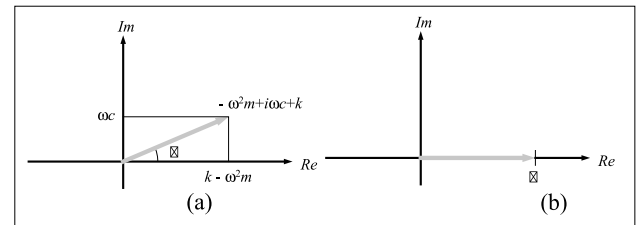


Figura 4 - O denominador da Equação (28) pode ser entendido como um número real multiplicado por $e^{i\alpha}$, ou seja, rotacionado de um ângulo α .

Portanto, pode-se imaginar que o denominador da Equação (28) é um vetor no plano complexo, originalmente horizontal, com módulo ρ (ou seja, um número real puro, sem parte complexa), que foi rotacionado de um ângulo α . Esse vetor “original” é mostrado na Figura 4 (b). Essa construção se torna útil para reescrever o denominador com a ajuda da equação de Euler, da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 -\omega^2 m + i\omega c + k &= \rho e^{i\alpha} = \\
 &= \sqrt{(k - \omega^2 m)^2 + (\omega c)^2} e^{i \arctan\left(\frac{\omega c}{k - \omega^2 m}\right)} \quad (31)
 \end{aligned}$$

que, de volta à Equação (28), juntamente com o já definido $P = P_0 e^{i\varphi}$, leva a:

$$\begin{aligned}
 V &= \frac{P_0 e^{i\varphi}}{\sqrt{(k - \omega^2 m)^2 + (\omega c)^2} e^{i \arctan\left(\frac{\omega c}{k - \omega^2 m}\right)}} = \\
 &= \frac{P_0}{\sqrt{(k - \omega^2 m)^2 + (\omega c)^2}} e^{i\varphi - i \arctan\left(\frac{\omega c}{k - \omega^2 m}\right)} \quad (32)
 \end{aligned}$$

Finalmente, lembrando a definição $V = V_0 e^{i\theta}$, encontra-se:

$$V_0 = \frac{P_0}{\sqrt{(k - \omega^2 m)^2 + (\omega c)^2}} \quad (33)$$

e

$$\theta = \varphi - \arctan\left(\frac{\omega c}{k - \omega^2 m}\right) \quad (34)$$

que definem completamente a resposta do sistema à “carga complexa” $p_1(t) = P e^{i\omega t}$. Como o sistema é linear, a resposta do sistema à “carga complexa” definida pela segunda parcela da Equação (21), $p_2(t) = P^* e^{-i\omega t}$, que é o complexo conjugado de $p_1(t)$, será $V^* e^{-i\omega t}$, que também é o complexo conjugado da resposta obtida para a carga $p_1(t)$.

Portanto, ao fazer a soma das duas parcelas conjugadas da resposta, como indica a Equação (23), haverá um cancelamento imediato das partes complexas da resposta, restando apenas o dobro da parte real, que, multiplicada por 1/2, resultará apenas na parte real da resposta, como indicado na Equação (22), onde V_0 e θ são realmente dados pelas equações (33) e (34).

Como V_0 é a amplitude máxima do deslocamento, uma informação muito importante que pode ser extraída da Equação (33) é que o seu valor máximo ocorre quando o denominador $\sqrt{(k - \omega^2 m)^2 + (\omega c)^2}$ é mínimo, o que pode ser encontrado igualando a zero sua derivada em relação a ω , encontrando:

$$\omega = \sqrt{\frac{2km - c^2}{2m^2}} \quad (35)$$

Como exemplo, seja um sistema composto por uma massa de 20 t suportada por quatro pilares verticais com perfis em aço W 200 x 53,0 Açominas (semelhante ao sistema estrutural mostrado na Figura 6), com um amortecimento de 1,2 kNs/m, sujeito a uma carga lateral cosenooidal. A rigidez é $k = 425,12$ kN/m. A Figura 5 mostra o gráfico de V_0 / P_0 em função de ω :

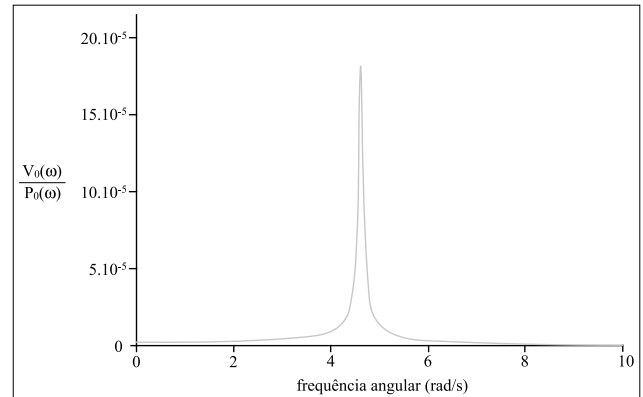


Figura 5 - Variação da amplitude da resposta em função da frequência angular ω da carga

Na figura pode-se ver que, à medida que a frequência angular de excitação da carga se aproxima de 4,61 rad/s, a amplitude da resposta final aumenta rapidamente, com o máximo próximo desse valor. Quando isso ocorre, diz-se que o sistema massa-mola está em ressonância com a carga de excitação, podendo comprometer a estrutura. O valor 4,61 rad/s é aquele que, num sistema massa-mola sem amortecimento ($c = 0$), leva a Equação (33) ao infinito (divisão por zero), o que é obtido quando $\omega = \sqrt{k/m}$. Essa frequência é chamada de frequência natural do sistema.

A grande vantagem em utilizar o domínio da frequência é que a equação diferencial passa a ser uma equação algébrica complexa. Assim, para análise de sistemas com múltiplos graus de liberdade o sistema de equações diferenciais se transforma num sistema de equações algébricas complexas lineares.

Qualquer tipo de carga $p(t)$ pode ser escrito em função do seu espectro; assim, para cada frequência da carga $p(t)$, o deslocamento pode ser conhecido.

A TRANSFORMADA DE FOURIER

A transformada direta de Fourier de uma função qualquer $f(t)$ é definida pela função:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (36)$$

Da mesma maneira, a função original $f(t)$ é recuperada pela transformada inversa de Fourier, definida por:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (37)$$

Se duas funções $f(t)$ e $F(\omega)$ satisfazem as equações (36) e (37), diz-se que elas formam um par de transformadas de Fourier.

O cálculo numérico dessas transformadas é feito através da transformada discreta de Fourier, definida por:

$$F(\omega_m) = \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} f(t_n) e^{-2\pi i \frac{mn}{N}} \quad (38)$$

, $m = 0, 1, \dots, N-1$

$$f(t_n) = \frac{\Delta\omega}{2\pi} \sum_{m=0}^{N-1} F(\omega_m) e^{2\pi i \frac{mn}{N}} \quad (39)$$

, $n = 0, 1, \dots, N-1$

onde os tempos discretos são dados por:

$$t_n = n\Delta t \quad (40)$$

e as frequências discretas são dadas por:

$$\omega_m = \mu_m \Delta\omega \quad (41)$$

Os valores de μ_m são dados pela Tabela 1.

Tabela 1 - Frequências discretas

m	μ_m	ω_m
0	0	0
1	1	$\Delta\omega$
2	2	$2\Delta\omega$
...
$N/2-1$	$N/2-1$	$(N/2-1)\Delta\omega$
$N/2$	$N/2$	$(N/2)\Delta\omega$
$N/2+1$	$-(N/2+1)$	$-(N/2+1)\Delta\omega$
...
$N-2$	-2	$-2\Delta\omega$
$N-1$	-1	$-\Delta\omega$

USO DA TRANSFORMADA DE FOURIER PARA ENCONTRAR A SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE MOVIMENTO

Foi exposto o procedimento a ser seguido para encontrar a resposta de um sistema a carregamento cossenoidal. Entretanto, quando a carga for arbitrária, a transformada de Fourier pode ser utilizada para encontrar a resposta, da seguinte forma:

Aplicando a transformada de Fourier à já definida equação do movimento:

$$mv(t) + c\dot{v}(t) + k\ddot{v}(t) = p(t) \quad (42)$$

Obtém-se, para condições iniciais nulas, ou seja, $v(0) = 0$ e $\dot{v}(0) = 0$:

$$V(\bar{\omega}) = P(\bar{\omega})H(\bar{\omega}) \quad (43)$$

onde as transformadas de $v(t)$ e de $p(t)$ são

$$V(\bar{\omega}) = \int_{-\infty}^{\infty} v(t) e^{-i\bar{\omega}t} dt \quad (44)$$

$$P(\bar{\omega}) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t) e^{-i\bar{\omega}t} dt \quad (45)$$

e $H(\bar{\omega})$ é a função complexa de resposta na frequência dada por:

$$H(\bar{\omega}) = \frac{1}{-\bar{\omega}^2 m + k + i\bar{\omega}c} \quad (46)$$

Portanto, a resposta no domínio do tempo será a transformada inversa de $V(\bar{\omega})$:

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} V(\bar{\omega}) e^{i\bar{\omega}t} d\bar{\omega} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(\bar{\omega}) H(\bar{\omega}) e^{i\bar{\omega}t} d\bar{\omega} \end{aligned} \quad (47)$$

As equações equivalentes às duas anteriores, porém, em sua forma discretizada, são:

$$\begin{aligned} P(\bar{\omega}_m) &= \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} p(t_n) e^{-2\pi i \frac{mn}{N}} \\ , m &= 0, 1, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (48)$$

$$\begin{aligned} v(t_n) &= \frac{\Delta \bar{\omega}}{2\pi} \sum_{m=0}^{N-1} P(\bar{\omega}_m) H(\bar{\omega}_m) e^{2\pi i \frac{mn}{N}} \\ , n &= 0, 1, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (49)$$

onde T_p é o comprimento do intervalo de truncamento, ou tempo estendido; N é o número de pontos discretos em que o tempo estendido é dividido; $\Delta t = T_p / N$ é o intervalo de separação entre os pontos no tempo e $\Delta \bar{\omega} = 2\pi / T$ é o intervalo de separação entre os pontos discretos na frequência. Os tempos discretos e as frequências discretas são definidos como nas equações (40) e (41).

EXEMPLO NUMÉRICO

A Figura 6 mostra uma caixa d'água elevada e a carga dinâmica transiente à qual está submetida. Essa carga simula a ação de uma rajada de vento. A massa da caixa d'água é $m = 10 \text{ t}$; a constante elástica dos pilares de sustentação é $k = 40000 \text{ kN/m}$; o coeficiente de amortecimento viscoso é $c = 120 \text{ kNs/m}$.

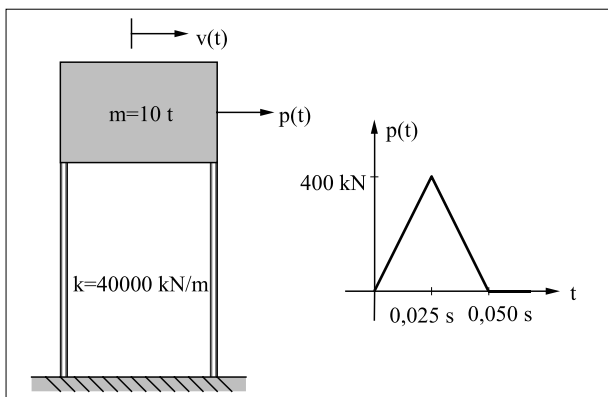


Figura 6 - Representação da caixa d'água e carregamento que nela atua

A resposta será avaliada pelo procedimento da transformada discreta de Fourier; o intervalo de tempo usado foi de 0,0025 segundo. O tempo estendido foi de 1,28 segundo, e, portanto, o número de pontos é 512. Embora se tenha calculado a resposta para todo o tempo estendido, a resposta da Figura 7 está mostrando apenas o primeiro 0,4 segundo.

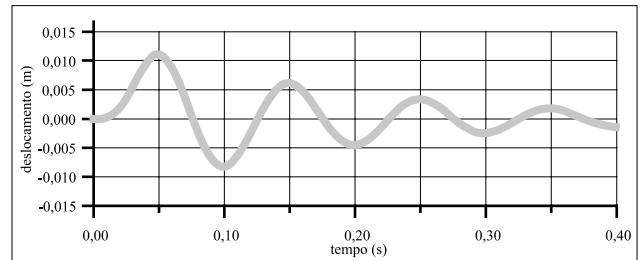


Figura 7 - Resposta obtida para o sistema da Figura 6

CONCLUSÃO

Em engenharia, números complexos são de extrema importância em disciplinas de circuitos e instalações elétricas e, particularmente para a engenharia civil, em vibrações mecânicas, quando se pretende fazer a análise no domínio da frequência. Há casos na engenharia em que as propriedades mecânicas dependem da frequência de excitação do carregamento dinâmico, como em certos casos de interação solo-estrutura. Nesses casos, a análise no domínio da frequência é a mais adequada. Além disso, em todos os casos, a opção de análise dinâmica no domínio da frequência é sempre possível. Neste trabalho abordou-se somente um sistema massa-mola com um grau de liberdade, resultando no domínio da frequência, numa equação algébrica complexa. Em sistemas com múltiplos graus de liberdade surgirá um sistema de equações algébricas complexas. Uma importante vantagem é o fato de que a obtenção das frequências naturais da estrutura é inerente ao procedimento. Como as frequências do carregamento dinâmico são conhecidas, o conhecimento das frequências naturais da estrutura permite ao engenheiro projetista antever possíveis ocorrências de ressonância e, assim, tomar decisões para evitar isso, modificando as propriedades da estrutura, de modo que as frequências naturais e de excitação sejam suficientemente diferentes.

O presente artigo cumpriu o objetivo de facilitar o entendimento por um aluno de engenharia civil de soluções de vibrações estruturais no domínio da frequência. Inicia-se com um históri-

co sobre números complexos, a dedução da equação de Euler e seu uso na solução, no domínio da frequência, da equação dinâmica de um sistema massa-mola submetido a uma carga temporal harmônica. Em seguida, apresenta-se a transformada de Fourier em suas formas contínua e discreta e sua aplicação na solução da equação dinâmica de um sistema submetido a uma carga temporal genérica. Além disso, foram resolvidos dois exemplos, um mostrando a relação deslocamento-carga, em função da frequência angular, e o outro mostrando a resposta temporal de uma estrutura típica a uma carga que simula uma rajada de vento.

REFERÊNCIAS

BHATTI, A. *Complex Numbers*. Disponível em: <<http://people.bath.ac.uk/aab20/complexnumbers.html>>. Acesso em: 3 jul. 2007.

O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. *Girolamo Cardano*. Disponível em: <<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Cardan.html>>. Acesso em: 3 jul. 2007.

_____. *Nicolo Fontana Tartaglia*. Disponível em: <<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Tartaglia.html>>. Acesso em: 3 jul. 2007.

_____. *Abraham de Moivre*. Disponível em: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/De_Moivre.html>. Acesso em: 3 jul. 2007.

_____. *Caspar Wessel*. Disponível em: <<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Wessel.html>>. Acesso em: 3 jul. 2007.

WEISSTEIN, E. W. *Euler, Leonhard (1707-1783)*. Disponível em: <<http://scienceworld.wolfram.com/biography/Euler.html>>. Acesso em: 3 jul. 2007.

BIBLIOGRAFIA CONSULTADA

BRIGHAM, E. O., *The fast fourier transform*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1974.

FERREIRA, W. G. *Análise dinâmica no domínio da frequência de sistemas estruturais*. Vitória: Enfoque, 2002.

CAMARGO, R. S.; FERREIRA, W. G. Análise dinâmica no domínio da frequência. Formulações clássica e matricial. *Revista Engenharia Ciência Tecnologia*, Vitória - ES, v. 5, n. 4, p. 33-42, 2002.

CLOUGH, R. W.; PENZIEN, J. *Dynamics of structures*, 2nd. New York: McGraw-Hill, 1993.

COOLEY, J. W.; TUKEY, J. W. An algorithm for machine calculation of complex fourier series, *Mathematics of Computation*, v. 19, p. 297-301, 1965.

WYLIE, C. R.; BARRETT, L. C., *Advanced engineering mathematics*, 6th. New York: McGraw-Hill, 1995.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e à Fapemig pelo apoio concedido ao desenvolvimento deste trabalho.

DADOS DOS AUTORES



Walnório Graça Ferreira

Possui graduação em Engenharia Civil pela Universidade Federal do Ceará (1973), mestrado (1990) e doutorado (1998) em Engenharia Civil pela Coppe da Universidade Federal do Rio de Janeiro e pós-doutorado (2008) pela Universidade Federal de Ouro Preto, Minas Gerais. Atualmente é Professor Associado da Universidade Federal do Espírito Santo. Tem experiência na área de engenharia civil, com ênfase em dinâmica estrutural, estruturas de aço e mistas e engenharia de incêndio (enfoque estrutural), atuando com entusiasmo no campo do ensino da engenharia nas áreas concreto armado, resistência dos materiais, método dos elementos finitos, dentre outros. Publicou os seguintes livros *Análise dinâmica no domínio da frequência de sistemas estruturais*, *Dimensionamento de elementos de perfis de aço laminados e soldados* (2 edições) e *Dimensionamento de estruturas de aço e mistas em situação de incêndio* (lançado na Europa e no Brasil).



Rodrigo Silveira Camargo

Graduado em Engenharia Civil pela Universidade Federal do Espírito Santo em 2005, obteve o grau de Mestre em Engenharia pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da UFES em 2008 e atualmente está cursando doutorado na Coppe/UFRJ. Vem desenvolvendo trabalhos científicos em análise dinâmica desde 2002, tendo publicados vários artigos nessa área de conhecimento, em revistas e congressos nacionais e internacionais.



Antônio Manoel Ferreira Frasson

Formado em Engenharia Elétrica pelo Instituto Nacional de Telecomunicações em 1984, mestrado em telecomunicações no Centro de Estudos em Telecomunicações da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro em 1989 e doutorado na Faculdade de Engenharia Elétrica e Computação da Universidade Estadual de Campinas em 2002. Atualmente é Professor Associado da Universidade Federal do Espírito Santo. Tem trabalhado em simulações de campos eletromagnéticos e difusão de calor em estruturas de concreto utilizando os métodos das diferenças finitas e elementos finitos.



Webe João Mansur

Graduado em Engenharia Civil pela Universidade Federal do Rio de Janeiro, em 1971, obteve o grau de Mestre em Engenharia pela Coppe/UFRJ em 1975 e o de Doutor em Engenharia Civil pela Universidade de Southampton, Inglaterra, em 1983. Iniciou sua carreira como professor no Programa de Engenharia Civil da Coppe em 1976 e, em 1996, por concurso público, tornou-se Professor Titular do programa, onde atua até hoje. Pesquisador 1A do CNPq, orientou 46 dissertações de mestrado, 29 teses de doutorado, 31 trabalhos de graduação em iniciação científica e nove projetos de final de curso. É coautor de setenta artigos publicados em periódicos internacionais indexados e seis capítulos de livros. Possui 177 trabalhos publicados em anais de congressos internacionais e nacionais e vinte artigos publicados em revistas nacionais.



Ricardo Azoubel da Mota Silveira

Possui graduação em Engenharia Civil pela Universidade Federal de Pernambuco (1986). Em 1990 e 1995, respectivamente, concluiu os cursos de mestrado e doutorado em Engenharia Civil na área de estruturas, na Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio). Recentemente fez pós-doutorado na Universidade do Texas em Austin (2007), Estados Unidos. Atualmente é Professor Associado da Universidade Federal de Ouro Preto e pesquisador e consultor *ad-hoc* do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico. Tem experiência na área de engenharia civil, com ênfase em estruturas, atuando principalmente nos seguintes temas: MEF, MDF, estruturas metálicas, análise não linear, ligações semirrígidas, análise inelástica e mecânica computacional.